Einführung in die Plasmaphysik

Skript

von Prof. Dr. E. Borie

WS 2005/06 und SS 2006

Aufgeschrieben von
Ferhat Aslan und Marius Bürkle

Prof. Dr. Edith Borie

Institut für Hochleistungsimpuls- und Mikrowellentechnik,
Forschungszentrum Karlsruhe
76344 Eggenstein/Leopoldshafen
borie@ihm.fzk.de

Die Vorlesung ist geplant als gemeinsame Veranstaltung für Studenten der Physik und des Maschinenbaus. Der Inhalt umfasst sowohl die Vertiefung in der Elektrodynamik als auch die kontrollierte Kernfusion. Physikstudenten können sich die zwei Lehrveranstaltungen, 2 SWS Vorlesung und die 1 SWS Übung pro Semester, als physikalisches Wahlfach anerkennen lassen.
Erforderlichen Vorkenntnisse: Elektrodynamik, Thermodynamik und Atomphysik

Dieses Skriptum umfasst die Vorlesung im Wintersemester, sowie Teile der Vorlesung im Sommersemester (Plasmawellen, Plasmarandschicht und Instabilitäten). Es war leider nicht möglich, auch die anderen Teilen, mit statistische Theorie, Vlasov Theorie der Plasmawellen und Landau-Dämpfung, aufzuschreiben.

Ich bedanke mich bei den Studenten Ferhat Aslan und Marius Bürkle, die das Skriptum aufgeschrieben haben, sowie bei Niko Seubert für Hilfe mit Teil 2 und sorgfältiges Korrekturlesen.
Das Kapitel über Plasmatechnologie wurde in wesentlichen Teilen von Dr. Mathias Kaiser, Fraunhofer ICT geschrieben.

An dieser Stelle bedanke ich mich auch bei allen, die mir Folien zur Verfügung gestellt haben. Einige erscheinen hier in den Abbildungen. Insbesonders danke ich das Projekt Kernfusion des FZK, sowie Prof. Dr. H. Zohm, Dr. R.D. Stambaugh und
Dr. E.J. Synakowkski für die Zusendung der Vortragsfolien.

Dieses Skriptum steht nur privater Nutzung zur Verfügung. Jede kommerzielle Nutzung, insbesondere der Verkauf oder die Verwendung zu Werbezwecken, ist nicht erlaubt ist.

Contents

1 Allgemeine Einführung **1**
1.1 Was ist ein Plasma? . . . 1
1.1.1 Wo findet man Plasmen in der Natur? . . . 2
1.1.2 Plasmatypen . . . 2
1.2 Einige Plasma-Eigenschaften . . . 2
1.2.1 Plasmafrequenz . . . 3
1.2.2 Temperatur eines Plasmas . . . 4
1.2.3 Debye shielding (Abschirmung) . . . 6
1.2.4 Debye Kugel und Plasmaparameter . . . 8

2 Bewegung geladener Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern **12**
2.1 Drifts des Führungszentrums . . . 15
2.1.1 $\vec{E} \times \vec{B}$ Drift . . . 17
2.1.2 Gravitationsdrift . . . 18
2.1.3 Feldgradienten senkrecht zu $\vec{B}$ . . . 18
2.1.4 Feldgradienten parallel zu $\vec{B}$ . . . 23
2.1.5 Polarisationsdrift . . . 29

3 Plasma als Flüssigkeit - Hydrodynamische Modelle **35**
3.1 Magnetohydrodynamik (MHD) . . . 35
3.1.1 Der Zylindrische "'Pinch"' . . . 43
3.1.2 Weitere Folgen . . . 46
3.1.3 Der Sonnenwind . . . 52
3.1.4 Magnetische Rekonnection in der Magnetosphäre . . . 53

4 Kernfusion **59**
4.1 Einführung . . . 59
4.2 Grundlagen des Magneteinschlusses . . . 68
4.2.1 Plasmaflächen, Rotationstransform . . . 73
4.2.2 Typische Tokamak Eigenschaften . . . 76
4.3 Diagnostik . . . 78
4.4 Plasma Heizung . . . 83
4.4.1 Heizmethoden . . . 84
4.4.2 Radiofrequenz . . . 85
4.5 Brennstoff nachfüllen . . . 89
4.6 Kontrolle der Verunreinigungen (Limiter, Divertor) . . . 90
4.7 Neue Entwicklungen . . . 94
4.7.1 Einfluss des Plasmarands . . . 102
4.7.2 Ergebnisse mit Stellaratoren . . . 106
4.7.3 Experimente mit D-T Mischungen . . . 107
4.8 Weitere Probleme . . . 109

5 Transport im Plasma **118**
5.1 Ambipolare Diffusion 122
5.2 Lösung der Diffusionsgleichung 124
5.2.1 Diffusion in einem Zylinder 126
5.3 Quelltermen 128
5.4 Diffusion in Anwesenheit eines Magnetfeldes 130
5.5 "'Klassische"'-Diffusion in einem ionisiertem Plasma 133
5.5.1 Bohm-Diffusion 134
5.6 Diffusion als Zufallsbewegung 136

6 Anhänge **142**
6.1 Literatur zur Vorlesung 142
6.2 Nützliche Formel 144
6.2.1 Vektoridentitäten 144
6.2.2 Zylinderkoordinaten (r, θ, z) 144

1 Allgemeine Einführung

1.1 Was ist ein Plasma?

Ein erheblicher Teil der Materie des Universums befindet sich im einem sogenannten Plasmazustand. Die Energie einiger Teilchen in einem Plasma ist so hoch, dass die elektrostatische Kraft, die die Elektronen am Atomkern bindet, überwunden wird. So könnte man ein Plasma als ein heißes, ionisiertes Gas, das aus einen großer Anzahl freier Elektronen, positiv geladener Ionen und manchmal auch neutralen Atomen (oder Molekülen) besteht, betrachten. Allerdings, wenn es wirklich ein Plasma ist, verhält es sich wie eine elektrisch gut leitende Flüssigkeit, die mit elektrischen und magnetischen Feldern wechselwirkt, und zeigt damit kollektives Verhalten, das in der Ausbreitung verschiedener Typen charakteristischen Wellen zum Ausdruck kommt (ähnlich wie in Festkörpern). Makroskopisch betrachtet ist es elektrisch neutral. Es wird häufig neben den festen, flüssigen und gasförmigen Zustand als vierter Zustand der Materie bezeichnet.
Das Wort Plasma (aus dem griechischen) wurde zuerst von Lewi Tonks und Irving Langmuir 1928/1929 zur Beschreibung eines ionisierten Gases (elektrische Entladung) eingeführt.

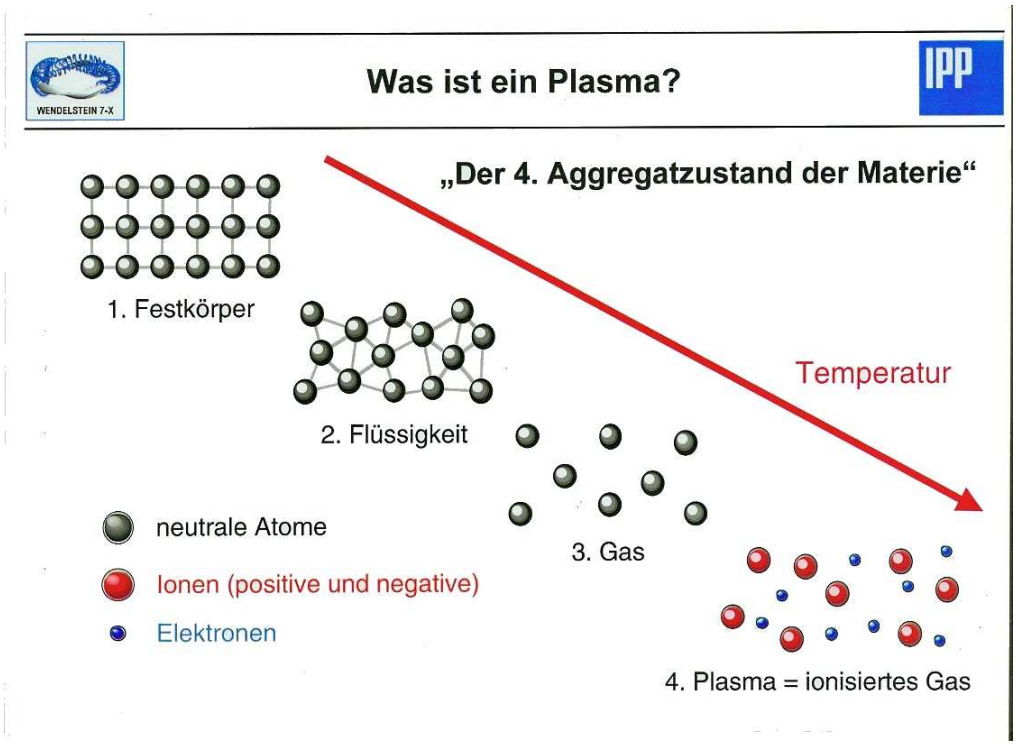


Figure 1: Zustände der Materie

1.1.1 Wo findet man Plasmen in der Natur?

Auf der Erde sind z.b. Blitze und Nordlichter Plasmen.
Die Sonne und die Sterne sind riesige Ansammlungen heißer Plasmen.
Auch die Sonnenwinde und Interstellare Gase sind im Plasmazustand.
(Interstellare Gase sind kalt, aber ihre Dichte ist so niedrig, dass ein einmal ionisiertes Atom sehr selten rekombiniert).
Darüber hinaus kann man Plasmen auch im Labor herstellen (Laborplasmen).
Warum studiert man Plasmen?

- Verständnis der Astrophysik, Physikalische Phänomäne im Weltraum
- Kontrollierte Kernfusion
- Plasmatechnologie (Gasentladungen bei Lampen, für Oberflächenbehandlungen, etc.)

1.1.2 Plasmatypen

1. Astrophysikalische Plasmen
   - Das innere von Sternen (Sonne) ist ein sehr heißes und dichtes Plasma. Sie Dichte und Temperatur nehmen ab in Richtung der Oberfläche.
   - Die Sonnencorona ist ein dünnes magnetisiertes Plasma mit $k_B \cdot T \approx 100keV$ ($T \approx> 10^6 K$).
   - Der Sonnenwind wird von der Sonne emittiert ($n_e \approx n_p \approx 5cm^{-3}$ und $T_e \approx 10^5 K$)
   - Ionosphäre: In der Höhe von 100-2000km werden die Atome in der Atmosphäre teilionisiert.
   - Entartete Plasmen in weissen Zwergen + Neutronensternen
2. Laborplasmen - schwach ionisiert
   - Flammen und Niederdruck Gasentladung (wird bei Lampen, einigen Lasertypen und anderen Technologien verwendet).
   - Hochdruck Entladungen (wird z.b. bei der Materialverarbeitung aber auch in Lampen verwendet).
   - Die freien Elektronen im einem Metall verhalten sich etwa wie ein sehr dichtes, kaltes Plasma. Hier ist die Quantenmechanik wichtig.
3. Kernfusion
   Heisses ($T \approx 10^8 K$) Plasma mit der Dichte $n_e \approx 10^{20} m^{-3}$. (Mehr darüber später)

1.2 Einige Plasma-Eigenschaften

Einer der typischen Merkmäle der Plasmaphysik ist, dass es ein System geladener Teilchen ist, die miteinander auf Grund elektromagnetischer Kräfte wechselwirken. Die Bewegung jedes Teilchens wird durch die lokalen elektrischen und magnetischen Felder bestimmt. Gleichzeitig aber ist jedes Teilchen eine Quelle der elektrischen und magnetischen Felder. Eine vollständige mikroskopische Beschreibung der Vorgänge würde erfordern, dass man gleichzeitig die Bewegungsgleichung für sehr viele (ca 10^{20}) Teilchen zusammen mit den Maxwell-Gleichungen lösen müsste (selbstkonsistent). Es ist klar, dass Näherungen notwendig sind. Hier werden nur die einfachste Näherungen behandelt.
Nicht jedes ionisierte Gas ist ein Plasma und deshalb sind weitere Kriterien erforderlich. Eine davon ist, daß ein Plasma quasineutral ist (Viele ähnliche Begriffe gelten für nicht

neutrale Systeme). Die Dichte der (einfach) positiv geladenen Ionen ist etwa so groß wie der Elektronen $\sum Z_i \cdot n_i \cong n_e$. Im allgemeinen ist es nach außen hin neutral.

1.2.1 Plasmafrequenz

Auch im Plasma inneren können sich die Ladungsdichten nicht zu stark unterscheiden, denn jede Ladungstrennung, die durch eine relative Verschiebung einer Gruppe von Elektronen gegen eine Gruppe von Ionen herforgerufen wird, führt zu hohen elektrischen Feldern, die die Ladungen wieder zusammenführen.
Schätzen wir diesen Effekt genauer ab, indem wir ein gleichförmig verteiltes System betrachten, das aus einer gleichen Anzahl von Elektronen, der Ladung $-e$ und Ionen der Ladung $+e$ besteht. Weiterhin nehmen wir an, daß die Teilchen fast keine 'thermische' Bewegung haben- Elektronen und Ionen sind fast in Ruhe (kaltes Plasma). Nun stören wir das System, indem wir einige Elektronen von einem Gebiet zu einem Benachbarten versetzen 2. Eine lokale Ladung verursacht ein elektrisches Feld $\vec{E}$.

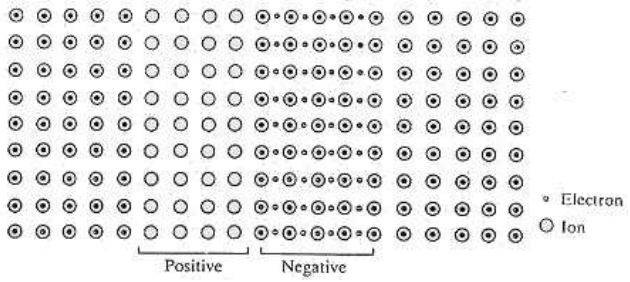


Figure 2: Versetzung von Elektronen in einem kalten Plasma

Da die Elektronen eine viel kleinere Masse haben als die Ionen, können wir zur guten Näherung die Ionenbewegung vernachlässigen. Die Elektronen werden zur ihrer ursprünglichen Lage zurückgeholt, Dabei gewinnen sie an kinetischer Energie. Wenn sie dann zurück zur ursprünglichen Lage kommen, ist das System wieder überall neutral und es gilt $\vec{E} = 0$. Die kinetische Energie, die die Elektronen noch besitzen, führt dazu, daß die Elektronen weiter fliegen und wieder die Neutralität zerstören und somit sich ein entgegengesetztes elektrisches Feld aufbaut, das wiederum die Elektronen abbremst. Diese Oszillation geht dann weiter.
Wir wollen nun die Frequenz dieser Oszillation berechnen. Man nennt sie die Elektronen-Plasma-Frequenz und sie spielt eine wichtige Rolle in vielen Systemen.
Die Bewegungsgleichung eines Elektrons in einem elektrischen Feld lautet:

$$m\ddot{x} = -eE$$

(x-Richtung parallel zu $\vec{E}$)
Das Gaußsche Gesetz lautet:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

(Q=Ladung innerhalb der Oberfläche S)
Vom Bild 3 sieht man, dass

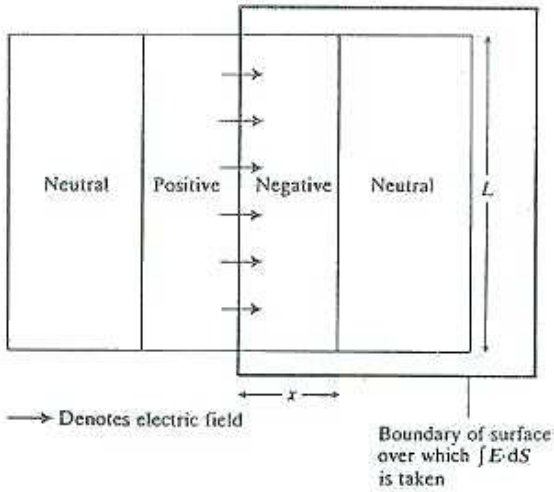


Figure 3: Elektrisches Feld im Plasma.

$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = -LE = Q/\epsilon_0$ mit $Q = -Lxn_0e \quad \Rightarrow E = n_0ex/\epsilon_0$
und daher

$$\ddot{x} = -\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_0} x = -\omega_{pe}^2 x \qquad \text{(definiert} \quad \omega_{pe}!)$$

2 Bemerkungen:

1. Ein vollständig ionisiertes Plasma mit einer Temperatur $k_BT \simeq 1\,eV$ hat bei Atmosphärendruck eine Dichte $n \simeq 6,25 \cdot 10^{23} m^{-3}$. Eine Verschiebung der Ladung um nur 1/2 mm führt bereits zur einer elektrischen Feldstärke von $E \approx 4 \cdot 10^{12} V/m$!
2. Ersetzen wir die Konstanten e^2, m_e, ϵ_0 durch deren Zahlenwerten so ergibt dies: $f_{pe} = \omega_{pe}/(2\pi) \simeq 9\sqrt{n_0/1m^{-3}}\,Hz$

1.2.2 Temperatur eines Plasmas

Die Temperatur beschreibt die ungeordnete 'thermische' Bewegung der in einer Flüssigkeit (Gas oder Plasma, aber auch Festkörper,...). Ein Gas in thermischem Gleichgewicht enthält Teilchen, die alle möglichen Geschwindigkeiten haben.
Für nicht relativistische Bewegung und bei Vernachlässigung aller Quanteneffekten ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeitsverteilung die Maxwellsche:

$$f(v)dv = A \cdot e^{-mv^2/(2k_BT)}$$

$f(v)dv$ ist die Anzahl der Teilchen pro Volumen mit Geschwindigkeit im Intervall v bis $v + dv$.
A wird so gewählt, daß

$$\int f(v)d^3v = n = \text{Anzahl Teilchen pro Volumen}$$

Daraus folgt:

$$A = n\Big[\frac{m}{2\pi k_B T}\Big]^{3/2}$$

Übung: Man rechne das Integral und beweise dies!
$(\int \ldots d^3v = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \ldots)$
Die mittlere kinetische Energie der Teilchen ist:

$$< E >= \frac{\int \frac{mv^2}{2} f(v) d^3v}{\int f(v) d^3v} = \frac{3}{2} k_B T$$

$(v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$.
Es ist sehr bequem, die Temperatur in Energieeinheiten anzugeben $T \to k_B T$
und diese wiederum in Einheiten von eV.

$$1\,eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J = k_B T$$
$$\Rightarrow T = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}\,J}{1,38 \cdot 10^{-23}\,J/K} = 11,600\,K$$
$$300\,K \hat{=} \frac{1}{40}\,eV$$

Da ein Plasma häufig nicht in thermischem Gleichgewicht ist, ist es möglich, dass es mehrere "'Temperaturen"' hat (gleichzeitig). Häufig ist es so, dass Ionen und Elektronen verschiedene Maxwellsche Verteilungen haben, da die Stoßraten i-i, e-e, e-i unterschiedlich sind.
Jede Teilchensorte ist im thermischen Gleichgewicht mit sich selber, aber die zwei Temperaturen gleichen sich nicht aus, bevor das Plasma zusammenbricht.
Wenn ein starkes magnetisches Feld vorhanden ist, sind Kräfte auf geladenen Teilchen, die sich senkrecht oder parallel zum $\vec{B}$ bewegen, unterschiedlich. Dies führt zu einer anisotropen Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung.
Verschiedene Bedeutungen von T: untersuchen wir eine Leuchtstoffröhre!
Die Elektronen Bewegung entspricht $T \approx 20000\,\mathrm{K}$.
Die Leuchtkraft entspricht eines schwarzen Strahlers mit $T \approx 4000K - 5000\,\mathrm{K}$.
Die Ionenbewgung hingegen entspricht $T_i \approx 300\,\mathrm{K}$. (Ausserdem besteht die Entladung überwiegend aus Neutralgas $n_e/n_i \approx 10^{-5}$; $\quad T_n \approx 300\,\mathrm{K}$)
Ohne ein elektrisches Feld, um die Entladung aufrecht zu erhalten gibt es keine geladene Teilchen und kein Licht.

Übung:

$$\text{mit} \quad pV = Nk_B T \quad \text{oder} \quad p = nk_B T$$

schätzen Sie die Teilchendichte ab für
a) ein ideales Gas bei 0°C und 1 Atm ($10^5\,N/m^2$) Druck.

$$n = \frac{10^5\,N/m^2}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273J} \approx 2,65 \cdot 10^{25} m^{-3}$$

b) "'Vakuum"' 10^{-6} Atm und Zimmertemperatur.

$$n = \frac{10^{-6}\,N/m^2}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300J} \approx 2,4 \cdot 10^{19} m^{-3}$$

1.2.3 Debye shielding (Abschirmung)

Eine wichtige Plasmaeigenschaft ist die Fähigkeit, elektrische Felder abzuschirmen.

Ausgehend von einem ungestörten kalten Plasma, führen wir langsam eine Ladung Q ein.

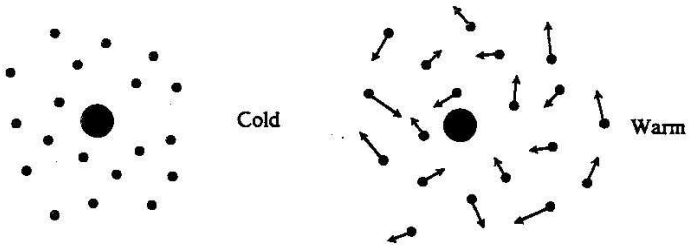


Figure 4: Kaltes und warmes Plasma

Diese (positive) Ladung zieht eine Elektonenwolke an und stößt Ionen ab. Bald wird sie vollständig abgeschirmt. Wenn wir die Temperatur erhöhen, haben die Elektronen und Ionen kinetische Energie. Tief in der Wolke (nahe der Ladung) können Elektronen immer noch nicht wegfliegen.

Es existiert aber ein Bereich am Rand der Elektonenwolke, wo die thermische Energie etwa

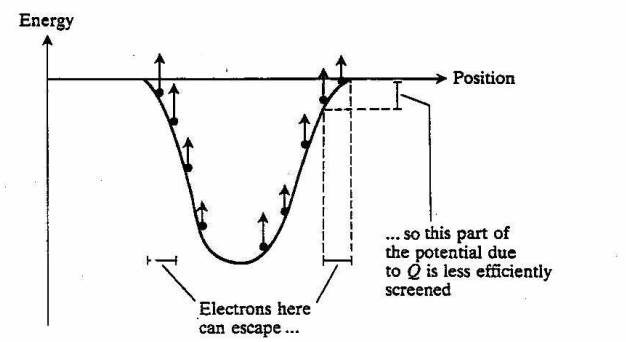


Figure 5: Escape of electrons from screening cloud, due to thermal motion

gleich der potentiellen Energie ist, da das Potential größtenteils abgeschirmt ist. Wie groß (ungefähr) ist diese Wolke?

Wir müssen hierfür die Poissonsgleichung lösen für das Potential Φ:

$$\epsilon_0 \nabla^2 \Phi = -e(n_i - n_e) = -\rho_{el}$$

Randbedingung: Für $r \to \infty$, $\Phi \to 0$ und $n_i \simeq n_e \simeq n_0$

Die Boltzmann-Relation für Teichendichte und elektrisches Feld lautet

$$n(W) = n_0 \cdot e^{W/k_B T}$$

da

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = A \cdot e^{-[mv^2/2 + W(\vec{r})]/k_B T} \quad \text{und} \quad W = q\Phi = \text{potentielle Energie}$$

So gilt:

$n_e = n_0 \cdot e^{e\Phi/(k_B T_e)}$, und $n_i = n_0 \cdot e^{-e\Phi/(k_B T_i)}$

(Φ ist die Ursache für die Ladungstrennung; gleichzeitig wird es verursacht durch die Ladungstrennung).
Am Rand der Wolke ist $|e\Phi| \ll k_B T$. Dann kann man eine Reihenentwicklung für die Exponentialfunktion machen.
Für Kugelsymmetrie haben wir dann

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\Phi}{dr}) = \frac{e(n_e - n_i)}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$= \frac{n_0 e}{\epsilon_0}\left(e^{e\Phi/(k_B T_e)} - e^{-e\Phi/(k_B T_i)}\right) \tag{2}$$

$$\approx \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{k_B T_e} + \frac{1}{k_B T_i}\right)\Phi \tag{3}$$

$$= \frac{1}{\lambda_D^2}\left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)\Phi \tag{4}$$

wobei die Debye Länge *definiert* wird als

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k_B T_e}{m_e}\right)^{1/2}\frac{1}{\omega_{pe}}$$

Die Lösung dieser Gleichung (Gl. 4) lautet

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-r\sqrt{(1+T_e/T_i)}/\lambda_D}}{r}$$

(produziert von einer Testladung Q)
$\Phi(r)$ fällt mit wachsendem r viel schneller ab, als das Coulombpotential (s. Abb. 6).
(Übung: Durch Einsetzen, zeigen Sie, dass diese $\Phi(r)$ eine Lösung der Gl. 4 ist).
Das Coulombpotential wird über den Abstand λ_D *abgeschirmt*.

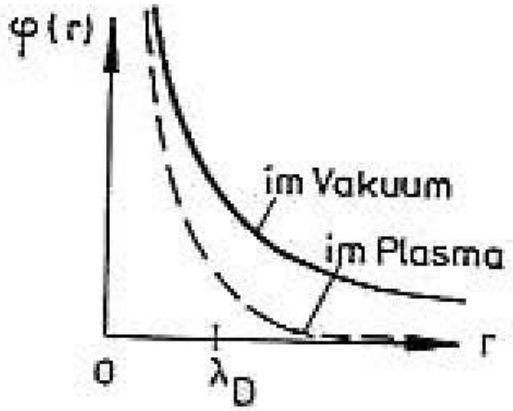


Figure 6: Die Debye-Abschirmung lässt das Potential einer Ladung im Plasma viel schneller abfallen als im Vakuum

Zahlenwerte: $e^2/\epsilon_0 = 1,81 \cdot 10^{-8}\, eVm$

$$\lambda_D = \left[\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_0}\right]^{\frac{1}{2}} = 7433\sqrt{\frac{k_B T_e/1\,eV}{n_0/1m^{-3}}}m$$

Somit lässt sich die *Quasineutralität* eines Plasmas quantitativ definieren.
Wenn die Dimensionen L des Systems viel größer als λ_D sind, werden (wenn lokale Ladungskonzentrationen aufgebaut oder externe Felder in das Plasma eingeführt werden) diese Ladungen auf einer Länge abgeschirmt, die viel kleiner als L ist.

$$\lambda_D \ll L \quad \leftrightarrow \quad n_i \simeq n_e$$

(Abweichung im Bereich der Größe λ_D sind möglich. Besonders in der Nähe von Gefäßwänden im Labor -mehr später-).

1.2.4 Debye Kugel und Plasmaparameter

Diese oben beschriebene Abschirmung ist nur dann sinnvoll, wenn die abschirmende "'Wolke"' sehr viele Teilchen enthält. Wieviele Teilchen sind in einer Kugel mit Radius λ_D? (nur diese nehmen an der Abschirmung teil)
Die Anzahl ist:

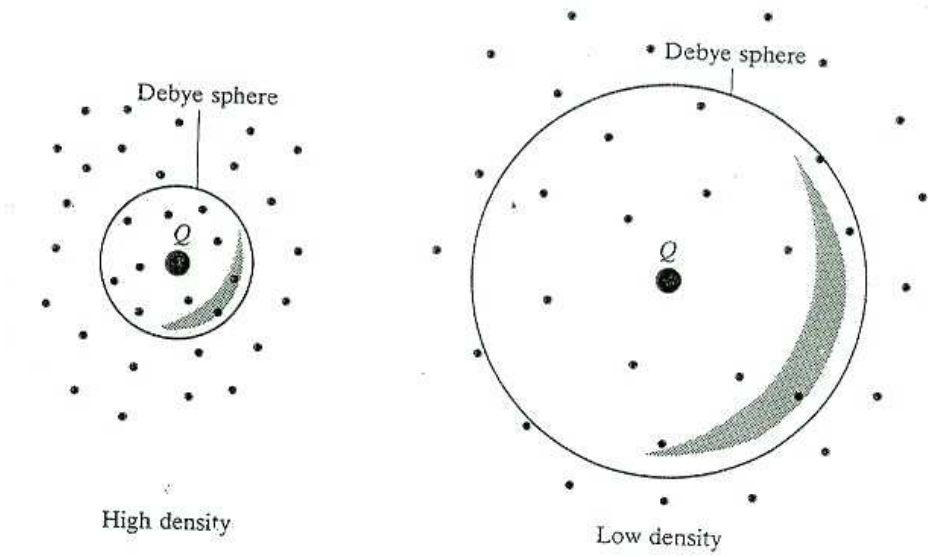


Figure 7: Debye sphere

$$\begin{aligned} N_D &= \frac{4\pi}{3}\lambda_D^3 n_0 \\ &= \frac{4\pi}{3}\left[\frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2}\right]^{\frac{3}{2}} n_0^{-\frac{1}{2}} \\ &\simeq 1,72 \cdot 10^{12}\left(\frac{k_B T_e}{1eV}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{n_0}{1m^{-3}}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Das Kollektive Verhalten eines Plasmas bedeutet $N_D \gg 1$.
Dies ist gleichzeitig die Bedingung für ein *ideales Plasma*, für das (ähnlich wie bei einem idealen Gas) die Wechselwirkungenergie (hier die elektrostatische potentielle Energie $\approx e^2 n_0^{1/3}/(4\pi\epsilon_0)$) viel kleiner als die mittlere kinetische Energie ($\frac{3}{2}k_B T$) ist.
Dieses Verhältnis ist gleich

$$\begin{aligned}\frac{E_{pot}}{E_{kin}} &= \frac{e^2 n^{1/3}/(4\pi\epsilon_0)}{3k_B T/2} \\ &= \frac{2}{3}\Big[\frac{e^2 n^{1/3}}{4\pi\epsilon_0 k_B T}\Big] = \frac{2}{3}(36\pi)^{1/3} N_D^{-2/3}\end{aligned}$$

und ist klein, wenn N_D groß ist.
Die Grösse $e^2 n^{1/3}/(4\pi\epsilon_0 k_B T)$ heisst *Plasmaparameter*. Für ein ideales Plasma ist sie klein.
Nicht ideale Plasmen (hohe Dichte, niedrige Temperatur) existieren auch, aber die mathematische Beschreibung ist schwer.
Die Quantenphysik spielt manchmal eine Rolle:

$$\begin{aligned}\lambda_{deBroglie} &= \frac{h}{p} \approx \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}} \\ \lambda_{Debye} &= \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_0 e^2}} \\ \frac{\lambda_{Debye}}{\lambda_{deBroglie}} &\approx \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_0 e^2}} \cdot \frac{\sqrt{3mk_B T}}{h} \\ &= \sqrt{\frac{3\epsilon_0 m}{n_0 e^2}} \cdot \frac{k_B T}{h} \approx \frac{E_{kin}}{h\omega_{pe}}\end{aligned}$$

For a hot plasma at not very high density this is huge and quantum effects are not important. But in a cool, dense plasma this can be much smaller and quantum effects may play a role. (Degeneracy is also important at high density; in that case $k_B T$ becomes comparable to the Fermi energy
$E_F \propto \frac{\hbar^2}{2m} n^{1/3}$; then $n^{2/3}\lambda_{dB}^2 = \frac{\hbar^2}{3mk_B T} n^{2/3} \propto \frac{E_F}{k_B T}$)

If this is small, there is no degeneracy since then $E_F \ll k_B T$.

Zum Schluss dieses Abschnitts, einige Zahlenwerte:

	Grösse (m)	Teilchendichte (m^{-3})	Temperatur (eV)	Magnetfeld (T)
Sonnenwind	10^{10}	10^{7}	10	10^{-8}
Sonnenkorona	10^{8}	10^{13}	100	10^{-9}
Ionosphäre	10^{5}	10^{12}	0.1	$3{\cdot}10^{-5}$
VanAllen Gürtel	10^{6}	10^{9}	100	10^{-6}
Interstellares Gas	10^{16}	10^{6}	1	10^{-10}
Gasentladung	0.01	10^{18}	2	0
Prozessplasma	0.1	10^{18}	100	bis 0.1
Fusionsexperiment	1	10^{20}	5000	3-5
Fusionsreaktor	2	10^{20}	15000	5-6

Table 1: Parameter einiger typischen Plasmasorten

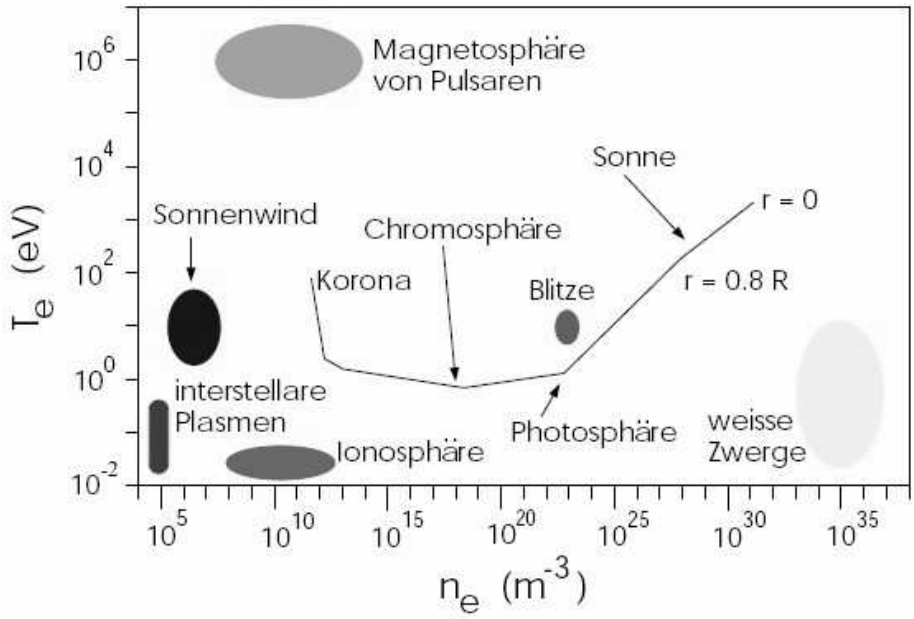


Figure 8: Vielfalt von Plasmen

Übungen

1. Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung ist gegeben durch

$$f(\vec{v}) \;=\; A\, e^{-mv^2/2kT}$$

mit k=Boltzmann'sche Konstante $= 1,38 \times 10^{-23}$ J/K. Die Teilchendichte n ist definiert als

$$n \;=\; \int f(\vec{v}) d^3v$$

Zeigen Sie, dass
i:

$$A \;=\; n\, [m/2\pi kT]^{\frac{3}{2}}$$

ii: die mittlere kinetische Energie

$$< E > \;=\; \frac{1}{n} \int \frac{mv^2}{2} f(\vec{v}) d^3v \;=\; \frac{3kT}{2}$$

(kT/2 pro Freiheitsgrad).
iii: Berechnen Sie die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_m (eigentlich Betrag der Geschwindigkeit) für die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung. Hier ist es nützlich, den Form

$$f(v) \;=\; 4\pi A\; v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

zu benutzen (integriert über alle Winkeln).

2. Schätzen Sie ab, wie viele Teilchen pro m^3 sind, in
   a) ein ideales Gas bei 0°C und 1 atm (=10^5 N/m^2) Druck
   b) 'Vakuum' bei Zimmertemperatur und Druck=10^{-6} atm.

3. Verifizieren Sie, durch explizite Substitution, dass die Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\Phi}{dr}\right) \;=\; \frac{\Phi}{\lambda_D^2}$$

durch

$$\Phi(r) \;=\; \Phi_0\, \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r}$$

gelöst wird. Die Debye Länge ist gegeben durch

$$\lambda_D^2 \;=\; \frac{\epsilon_0 kT_e}{ne^2} \;=\; \frac{kT_e}{n} \cdot \frac{1}{1.81 \times 10^{-8}\, eV \cdot m}$$

Berechnen Sie λ_D, N_D und die Plasmafrequenz für
   a) ein Fusionsplasma mit kT=10 keV und n=10^{20} m^{-3}
   b) die Ionosphäre mit kT=0.1 eV und n=10^{12} m^{-3}
   c) den Sonnenkorona mit kT=100 eV, B=10^{-9} T und n=10^{13} m^{-3}
   d) den Sonnenwind mit kT=5 eV und n=$5 \cdot 10^6$ m^{-3}
   e) eine Gasentladung mit kT=2 eV, n=10^{16} m^{-3}

2 Bewegung geladener Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern

In Abwesenheit von äußeren Kräften würde ein Plasma ziemlich rasch Auseinander fließen bzw. zum Gas rekombinieren.
Bei Gasen mit niedriger Teilchendichte sind auch Stösse zwischen den Teilchen vernachlässigbar. In solchen Fällen spielt dann die Einzelbewegung der Teilchen die dominierende Rolle. Bei einer Flüssigkeit hingegen dominieren die kollektiven Effekte und die Bewegung einzelner Atome oder Moleküle ist vernachlässigbar.
Bei einem Plasma muss man beide Aspekte berücksichtigen, da ein Plasma zwischen diesen Extremen liegt.
Zu Beginn wird die Bewegung einzelner Teilchen betrachtet. Die hydrodynamischen Aspekte werden später behandelt. Da die geladenen Teilchen in einem Plasma oft durch Magnetfelder zusammengehalten werden, ist die Bewegung geladener Teilchen in (auch nicht homogenen) Magnetfeldern sehr wichtig. Die Bewegungsgleichung eines Teilchens im elektromagnetischen Feld lautet:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad \text{Lorentz-Kraft}$$

mit $W = mv^2/2$ gilt auch $dW/dt = q\vec{v} \cdot \vec{E}$
Für relativistische Teilchen gilt $W = \gamma m_0 c^2$, $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$ mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Mit diesen Definitionen gelten die Bewegungsgleichungen auch relativistisch.
Wenn $\vec{E}$ und $\vec{B}$ von Ort und/oder Zeit abhängig sind, kann dies kompliziert werden. Hier werden nun einige einfache Fälle analysiert.
Für $\vec{E} = 0$ wird $|\vec{v}|$=konst. und $d\vec{v}/dt = \vec{v} \times \vec{\omega}_c$ mit $\vec{\omega}_c = q\vec{B}/m$ oder $\vec{\omega}_c = \pm\,|q|\,\vec{B}/m$
Für Elektronen gilt
$|\omega_{ce}| = |e|B/m_e = 1.76 \cdot 10^{11}(\mathrm{B/1T})\,\mathrm{rad/s}$ $(f_{ce} = \omega_{ce}/(2\pi)$=28 GHz (B/1T))
Bei Fusionsplasmen sind ω_{ce} und ω_{pe} oft vergleichbar.
Für $\vec{B}$ in die z-Richtung und $\vec{B}$ = konst. ist $dv_z/dt = 0$ und deshalb v_z = konst.
Nun definieren wir $v_\perp = \sqrt{v^2 - v_z^2}$ und $\vec{v}_\perp = \vec{v} - v_z\hat{z}$. Diese beschreiben die Bewegung senkrecht zu $\vec{B}$ (Kreisbahn).
Als Gleichungssystem erhält man

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y \quad , \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x$$

Nach nochmaliger Ableitung nach der Zeit erhält man

$$\frac{d^2\vec{v}_\perp}{dt^2} = -\omega_c^2 \vec{v}_\perp$$

Dies ist die Gleichung für einen harmonischen Oszillator mit der Lösung

$$
\begin{aligned}
v_x =& v_\perp \cos(w_c t + \theta) \\
v_y =& - v_\perp \sin(w_c t + \theta) \\
v_z =& v_{z0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x =& x_c + \frac{v_\perp}{\omega_c} \sin(w_c t + \theta) \\
y =& y_c + \frac{v_\perp}{\omega_c} \cos(w_c t + \theta) \\
z =& z_c + v_z t
\end{aligned}
$$

Dies beschreibt eine Spiralbahn. x_c, y_c, z sind die Koordinaten des *Führungszentrums*.

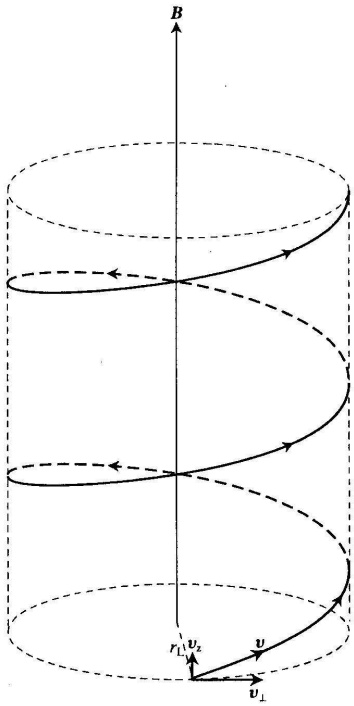


Figure 9: Helical path of an electron in a uniform magnetic field

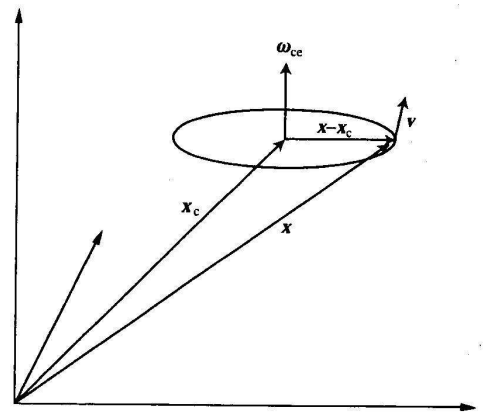


Figure 10: Guiding center position $\vec{x}_c$.

Da $\omega_c > 0$ für Ionen aber $\omega_c < 0$ für Elektronen, ist die Rotationsrichtung entgegengesetzt für die zwei Teilchensorten.
Nun definieren wir den Zyklotron (oder Larmor) Radius

$$r_L = \frac{v_\perp}{|\omega_c|}.$$

Offensichtlich ist dies der Radius der Kreisbahn; für eine Kreisbahn gilt

$$\frac{mv_\perp^2}{r_L} = |q|v_\perp B \quad \Rightarrow \quad r_L = \frac{mv_\perp}{|q|B} = \frac{v_\perp}{|\omega_c|}$$

Für Elektronen gilt

$$r_L = \left(\frac{v_\perp}{c}\right)\frac{(0.0017\,mm)}{B(T)}$$

Massenabhängigkeit (für gleiche $|q|$, und $W_\perp = mv_\perp^2/2$): $\omega_c \propto 1/m$ und $v_\perp \propto \sqrt{W_\perp/m}$
Beide sind für Elektronen größer als für Ionen. Aber $r_L \propto \sqrt{mW_\perp}$ ist viel kleiner für Elektronen als für Ionen (Abb. 11).

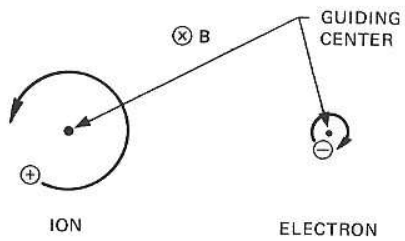


Figure 11: Larmor orbits in a magnetic field.

Ein kreisendes Elektron bildet einen elektrischen Strom. Aus der Projektion auf eine Ebene senkrecht zum Magnetfeld sieht man, dass die Ladung $-e$ einen Punkt auf der Bahn jede $2\pi/\omega_c$ passiert. Der Strom ist $I = -e\omega_c/(2\pi)$.

Das damit verknüpfte magnetische Moment ist

$$\begin{aligned}\mu &= I \cdot Flaeche = I\pi r_L^2 \\ &= \frac{-ev_\perp}{2\pi r_L} \cdot \pi r_L^2 = \frac{mv_\perp^2}{2B}\end{aligned}$$

Dies wiederum erzeugt ein Magnetfeld, entgegengesetzt zu $\vec{B}$, ein Zeichen für den Diamagnetismus. Es ist proportional zur senkrechten Energie des Teilchens.
In Hochdruckplasmen wird ein äußeres Magnetfeld durch die Überlagerung des Diamagnetismus einer großen Anzahl von Teilchen deutlich abgeschwächt.
Die Larmor-Radien und Gyrationsfrequenzen der Ionen und Elektronen liefern wichtige räumliche und zeitliche Längensklaen für ein magnetisiertes Plasma. Effekte deren Zeit- bzw. Längenskalen wesentlich kleiner als $1/\omega_c$, bzw r_L sind, sind oft unempfindlich gegenüber einem äußeren Magnetfeld.

2.1 Drifts des Führungszentrums

Wie schon bekannt ist die Bahn eines geladenen Teilchens in einem konstanten Magnetfeld eine Spiral, d.h. Kreisbewegung um einen Punkt, der sich mit konstanter Geschwindigkeit parallel zum Magnetfeld bewegt. Dieser Punkt heißt Führungszentrum (guiding center). In vektorieller Schreibweise gilt

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \pm\vec{v} \times \vec{\omega}_c = (\pm)(\hat{x}v_y\omega_c - \hat{y}v_x\omega_c)$$

und

$$\begin{aligned}x - x_c &= \frac{v_\perp}{\omega_c}\sin(\omega_c t + \theta) = \frac{-v_y}{\omega_c} \\ y - y_c &= \frac{v_\perp}{\omega_c}\cos(\omega_c t + \theta) = \frac{v_x}{\omega_c}\end{aligned}$$

deshalb

$$\vec{v}_\perp = (\vec{x} - \vec{x}_c) \times \vec{\omega}_c$$

und

$$(\vec{x} - \vec{x}_c) = -\frac{(\vec{v}_\perp \times \vec{\omega}_c)}{\omega_c^2} = \frac{-1}{\omega_c^2}\frac{d\vec{v}_\perp}{dt}$$

als Überprüfung berechnen wir $d\vec{x}_c/dt$:

$$\begin{aligned}\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} &= \frac{d\vec{x}_c}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}_\perp \times \vec{\omega}_c}{\omega_c^2}\right) = \frac{d\vec{x}_c}{dt} - \frac{(\vec{v_\perp} \times \vec{\omega}_c) \times \omega_c}{\omega_c^2} \\ &= \frac{d\vec{x}_c}{dt} + \frac{1}{\omega_c^2}[\vec{v}\omega_c^2 - (\vec{v} \cdot \vec{\omega}_c)\vec{\omega}_c] \\ &= \frac{d\vec{x}_c}{dt} + \vec{v} - v_z\hat{z} \;\Rightarrow \frac{d\vec{x}_c}{dt} = v_z\hat{z}\end{aligned}$$

(wie erwartet) und $|\vec{x} - \vec{x}_c| = |v_\perp/\omega_c| = r_L$
Um die Abweichungen von dieser einfachen Bewegung zu berechnen, werden wir ausnutzen dass $\vec{x}_c$ der mittlerer Ort des Teilchens ist, wenn die (schnelle) Kreisbewegung des Teilchens weggemittelt wird. In anderen Worten, wenn wir die Teilchenbewegung über Zeiten die viel länger als $1/\omega_c$ sind, verfolgen wollen, genügt es, nur die Bewegung des Führungszentrums zu betrachten. In vielen Fällen kann man die Teilchenbewegung in sehr guter Näherung als Spiralbahn plus ein Drift des Führungszentrums beschreiben.

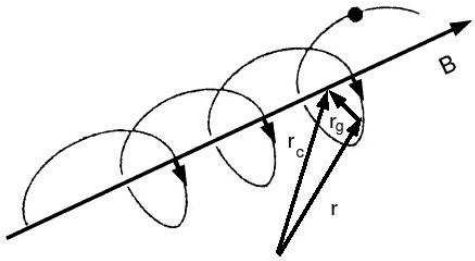


Figure 12: Aufspaltung der Bewegung eines Teilchens im Magnetfeld mit äusserer Kraft in Gyrationsbewgung $\vec{r}_g$ und Bewegung des Führungszentrums $\vec{r}_c$.

Für den Fall dass zusätzlich zum Magnetfeld eine äußere Kraft $\vec{F}$ vorhanden ist, lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \pm\vec{v} \times \vec{\omega}_c + \frac{\vec{F}}{m}$$

Mit

$$\vec{x} \approx \vec{x}_c \mp \frac{\vec{v} \times \vec{\omega}_c}{\omega_c^2} \quad \text{und} \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}_c}{dt} \mp \frac{1}{\omega_c^2}\Big(\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{\omega}_c\Big)$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{x}}{dt} &= \frac{d\vec{x}_c}{dt} \mp \frac{1}{\omega_c^2}\Big(\pm\vec{v} \times \vec{\omega}_c + \frac{\vec{F}}{m}\Big) \times \omega_c \\
&= \frac{d\vec{x}_c}{dt} \mp \frac{1}{\omega_c^2}\Big(\frac{\vec{F}}{m} \times \vec{\omega}_c\Big) - \frac{(\omega_c^2 v_z \hat{z} - \omega_c^2 \vec{v})}{\omega_c^2} \\
&= \vec{v} + \frac{d\vec{x}_c}{dt} - v\hat{z} \mp \frac{1}{\omega_c}\Big(\frac{\vec{F}}{m} \times \vec{\omega}_c\Big)
\end{aligned}$$

($+q \leftrightarrow$ Ionen, $-q \leftrightarrow$ Elektronen) Da auch $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ erhält man

$$\frac{d\vec{x}_c}{dt} = v_z\hat{z} \pm \Big(\frac{\vec{F}}{m} \times \vec{\omega}_c\Big)/\omega_c^2$$

Die Spiralbewegung wird mit einem Drift des Führungszentrums überlagert.
Allgemein gilt:

$$\boxed{\vec{v}_D = \Big(\frac{\vec{F}}{m} \times \frac{\pm|q|\vec{B}}{m}\Big)/\Big(\frac{q^2B^2}{m^2}\Big) = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2}}$$

2.1.1 $\vec{E} \times \vec{B}$ Drift

Ein besonderes Beispiel ist der Fall $\vec{F} = q\vec{E}$; dann ist

$$\pm\frac{\vec{F}}{m} \times \frac{\vec{\omega}_c}{\omega_c^2} = \pm(\frac{q\vec{E}}{m} \times \frac{|q|\vec{B}}{m})/(\frac{q^2B^2}{m^2}) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

(unabhängig von der Teilchen Masse und Ladung!)
Eine alternative Herleitung der $\vec{E} \times \vec{B}/B^2$ Drift:

$$\begin{aligned}\dot{v}_x =& \omega_c v_y + \frac{qE_x}{m} \\ \dot{v}_y =& -\omega_c v_x + \frac{qE_y}{m}\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\ddot{v}_x =& -\omega_c^2 v_x + \frac{\omega_c}{m} qE_y = -\omega_c^2\Big(v_x - \frac{E_y}{B}\Big) \\ \ddot{v}_y =& -\omega_c \dot{v}_x = -\omega_c^2\Big(v_y + \frac{E_x}{B}\Big)\end{aligned}$$

nun ist $\vec{E} \times \vec{B} = \hat{x}E_yB_z - \hat{y}E_xB_z$ und somit

$$\frac{d^2\vec{v}_\perp}{dt^2} = -\omega_c^2\Big(\vec{v}_\perp - \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}\Big)$$

Diese ist die Gleichung für eine gleichförmige Kreisbewegung überlagert mit einem Drift des Führungszentrums (senkrecht zu $\vec{E}$ und zu $\vec{B}$).
Es gibt auch eine Herleitung aus den Transformationseigenschaften der elektrischen und magnetischen Felder in der speziellen Relativitätstheorie (s. Jackson, z.B.)
In anschaulicher Betrachtung gewinnt das Teilchen Energie in einem Halbkreis der Gyrationsbewegung und erhöht damit $v_\perp$ und r_L, wärend es im anderen Halbkreis Energie verliert. Die unterschiedlichen Werte von r_L auf den 2 Seiten der Bahn verursachen den Drift.

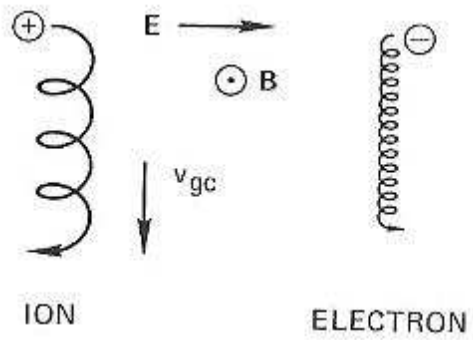


Figure 13: Particle drift in crossed electric and magnetic fields.

Da Teilchen mit entgegengesetzten Ladungen in entgegengesetzten Richtungen rotieren, werden sie auf entgegengesetzten Seiten der Bahn beschleunigt (bzw. abgebremst).

Leichtere Teilchen haben kleinere Larmor Radien r_L und driften weniger pro Umlauf. Da ω_c aber großer ist, machen sie mehr Umläufe in eine gegeben Zeit. Am ende ist der Drift gleich für alle Teilchen.
Das ganze Plasma kann sich auf Grund des $\vec{E} \times \vec{B}$ Drifts bewegen.
Da $\vec{j}_e = -\vec{j}_i$ gibt es keinen Gesamtstrom ($\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_i = 0$)
Für $E = 100\,kV/m$ und $B = 3\,T$ ist $v_E = 3,3 \cdot 10^4 m/s$.

2.1.2 Gravitationsdrift

$\vec{F} = m\vec{g}$ (eine grobe Näherung, aber zumindest lokal ist $\vec{g}$ fast konstant).

$$\vec{v}_g = m\vec{g} \times \frac{\vec{B}}{qB^2}$$

hängt von der Masse und von der Ladung ab. Dieser Drift induziert einen elektrischen

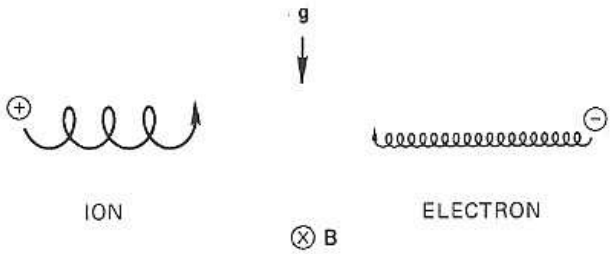


Figure 14: Drift of a gyrating particle in a gravitational field.

Strom im Plasma, da die Ionen und Elektronen in entgegengesetzte Richtung driften.

$$\vec{j} = n_e\left(\frac{m_i}{Z} + m_e\right)\frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}$$

Da die Ionen schwerer sind, sind sie auch schneller (ausnahmsweise!). Dieser Strom führt in einem endlichen Plasma zu einer Ladungstrennung, was wiederum zu einem elektrischen Feld und dann auch zu einem $\vec{E} \times \vec{B}$-Drift führt. Meistens ist dies für Laborplasmen vernachlässigbar.
Was passiert mit einer 'Plasma-Wolke' in der Ionosphäre? $\vec{g}$ ist radial nach innen; die Magnetfeldlinien der Erde sind bekannt $\Rightarrow \vec{v}_g$ ist horizontal gerichtet und senkrecht auf $\vec{B}$.
Der Fall eines zeitabhängigen elektrischen Feld $\vec{E}$ wird später diskutiert.

2.1.3 Feldgradienten senkrecht zu $\vec{B}$

In realistischen Fällen ist das Magnetfeld nicht gleichförmig und auch nicht konstant. Trotzdem bleibt die Bewegung in erster Linie eine Kreisbahn (oder Spiralbahn) um die Feldlinien, überlagert von einem Drift des Führungszentrums, solange die Änderungen nicht zu schnell sind. Dh.:

$$\frac{2\pi}{\omega_c}\frac{\partial B}{\partial t} \ll B$$
$$r_L|(\nabla B)_\perp| \ll B$$
$$\frac{v_z}{\omega_c}|(\nabla B)_\parallel| \ll B$$

Wenn diese gelten, kann man die Inhomogenitäten als Störung betrachten.
Zuerst betrachten wir ein Magnetfeld, dessen Feldstärke sich in Richtung senkrecht zum Feld ändert. Die Feldstärke (vom Teilchen gesehen) ändert sich periodisch da das Teilchen um die Feldlinien kreist. Dies führt zu einem Drift senkrecht zum Magnetfeld. Mit einer geeigneten Achsenwahl können wir annehmen

$$\vec{B} \approx \Big(B_0 + (y - y_0)\frac{\partial B_z}{\partial y}\Big)\hat{z}$$

Bei $y = y_0$ gilt $\omega_c = |q|B_0/m$; weiter wird l_c definiert durch

$$\frac{1}{l_c} = \frac{1}{B_0}\frac{\partial B_z}{\partial y}\Big|_{y=y_0}$$

Die Gleichungen für die senkrechten Komponenten der Geschwindigkeit sind dann

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= \pm\,\omega_c v_y\Big(1 + \frac{(y - y_0)}{l_c}\Big)\\ \frac{dv_y}{dt} &= \mp\,\omega_c v_x\Big(1 + \frac{(y - y_0)}{l_c}\Big)\end{aligned}$$

Die Zusatzterme können abgeschätzt werden indem wir die ungestörten Lösungen

$$\begin{aligned}v_x =& v_\perp\,\cos(\pm\omega_c t + \phi)\\ v_y =& -\,v_\perp\,\sin(\pm\omega_c t + \phi)\\ y - y_0 =& \frac{v_{perp}}{(\pm)\omega_c}\,\cos(\pm\omega_c t + \phi)\end{aligned}$$

einsetzen, mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= \pm\,\omega_c v_y \mp (\pm)\frac{v_\perp \omega_c r_L}{l_c}\,\sin(\pm\omega_c t + \phi)\cos(\pm\omega_c t + \phi)\\ \frac{dv_y}{dt} &= \pm\,\omega_c v_x \mp (\pm)\frac{v_\perp^2}{l_c}\,\cos^2(\pm\omega_c t + \phi)\end{aligned}$$

Alles was schnell oszilliert mittelt sich zu Null über eine Gyrationsperiode ($2\pi/\omega_c$) da

$$\frac{\omega_c}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} dt\begin{bmatrix}\sin(\pm\omega_c t + \phi)\cos(\pm\omega_c t + \phi)\\ \cos^2(\pm\omega_c t + \phi)\end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d(\omega_c t)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sin(2(\pm\omega_c t + \phi))\\ \frac{1}{2}(1 + \cos(2(\pm\omega_c t + \phi)))\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Dann gilt für die Geschwindigkeiten gemittelt über eine Gyrationsperiode

$$\begin{aligned}\langle\frac{dv_x}{dt}\rangle &= \pm\omega_c v_y\\ \langle\frac{dv_y}{dt}\rangle &= \mp\omega_c v_x - \frac{v_\perp^2}{2l_c}\end{aligned}$$

Man hat eine Zusätzliche Beschleunigung

$$\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{v_\perp^2}{2l_c}\hat{y}$$

(in die y-Richtung) und dies führt zu einen Drift des Führungszentrums in die x-Richtung

$$\vec{v}_D = \mp\hat{x}\Big(\frac{v_\perp^2}{2\omega_c}\frac{1}{B_0}\frac{\partial B_0}{\partial y}\Big)$$

Der Betrag $v_D/v_\perp = r_L/(2l_c) \ll 1$ bestätigt die Annahme.
Verallgemeinert für beliebige Achsen

$$\vec{B}\times\nabla|\vec{B}| = B_0\Big(\hat{y}\frac{\partial B_0}{\partial x} - \hat{x}\frac{\partial B_0}{\partial y}\Big)$$

gibt

$$\vec{v}_D = \frac{\pm v_\perp^2}{2\omega_c}\frac{\vec{B}\times\nabla|\vec{B}|}{B^2} = \frac{mv_\perp^2}{2qB^3}\vec{B}\times\nabla|\vec{B}|$$

Nun gilt (immer) $\nabla\cdot\vec{B} = 0$. Ausserdem gilt in Vakuum $\nabla\times\vec{B} = 0$.
Deshalb wenn $(\nabla|\vec{B}|)_\perp \neq 0$, müssen die Feldlinien gekrümmt werden. Der Krümmungsradius ist gegeben durch

$$\frac{1}{R_c}\hat{e}_{R_c} = -\frac{\nabla|\vec{B}|}{B}$$

Dies führt zu einem weitern Drift des Führungszentrums. Ein Teilchen, das um eine

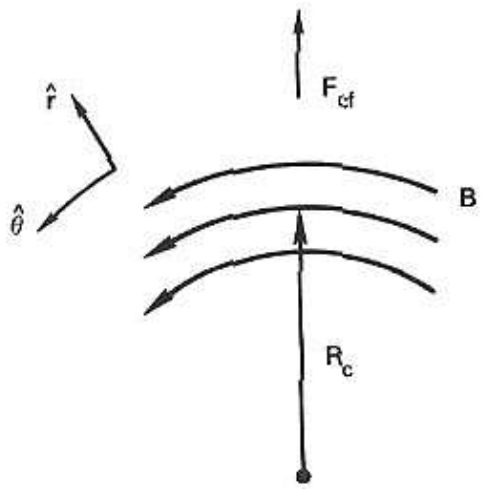


Figure 15: A curved magnetic field, with definition of the radius of curvature R_c.

gekrümmte Feldlinie gyriert, erfährt eine Zentrifugalbeschleunigung des Führungszentrums. Gemittelt über alle Teilchen ist dies gegeben durch

$$\vec{a}_{zent} = \frac{v_\parallel^2}{R_c}\hat{e}_{Rc}$$

wobei $v_\parallel^2$ das gemittelte Quadrat der Geschwindigkeitskomponente entlang der Magnetfeldlinie ist. Die Driftgeschwindigkeit ist dann

$$\vec{v}_D = \frac{mv_\parallel^2}{q}\frac{\hat{e}_{Rc}\times\vec{B}}{R_cB^2} = -\frac{mv_\parallel^2}{q}\frac{\nabla|\vec{B}|\times\vec{B}}{B^3}$$

Dies kann man offenbar zum $\nabla|\vec{B}|$-Drift addieren. Die Summe ist

$$\vec{v}_D = \frac{m}{q}(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2})\frac{\vec{B}\times\nabla|\vec{B}|}{B^3}$$

Näherungsweise ist dies proportional zur mittleren kinetischen Energie der Teilchen (und deshalb auch zur Temperatur).
Anwendung auf Teilchenbewegung in einem Torus

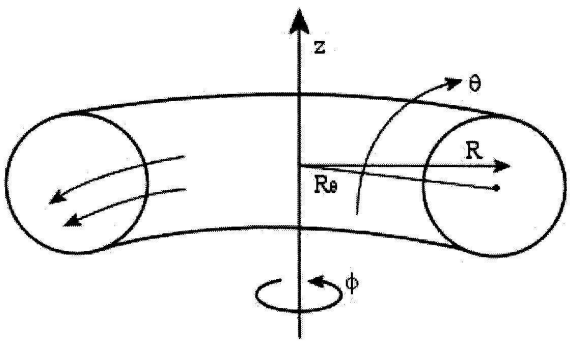


Figure 16: Definition of coordinates in toroidal geometry

Mit Spulen gleichmäßig um den Torus angeordnet, gibt es eine Stromdichte J_θ, die dafür sorgt, dass

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_R \\ B_\phi \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_0 B_0/R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B_0 =$ Feld im Mittelpunkt des Torus, $R = R_0$

$$\nabla|\vec{B}| = -\frac{B_0 R_0}{R^2}\hat{R}, \qquad \vec{B}\times|\vec{B}| = \frac{B_0^2 R_0^2}{R^3}\hat{z}$$

$$\frac{(\vec{B}\times\nabla|\vec{B}|)}{B^2} = \frac{\hat{z}}{R}$$

$$\vec{v}_D = \frac{m}{qB}\Big(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2}\Big)\frac{\hat{z}}{R} = \frac{m}{q}\Big(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2}\Big)\frac{\hat{z}}{B_0 R_0}$$

Die Ionen driften nach oben, die Elektronen nach unten (s. Abb. 17). Dies führt zu einer Ladungstrennung und dann zu einem elektrischen Feld (in die z-Richtung). Dies verursacht wiederum ein $\vec{E}\times\vec{B}$-Drift (hier radial nach außen). Die Plasmateilchen treffen die Wand und gehen verloren.

Um die Plasmateilchen richtig einzuschließen, muss man die Feldlinien so verformen, das

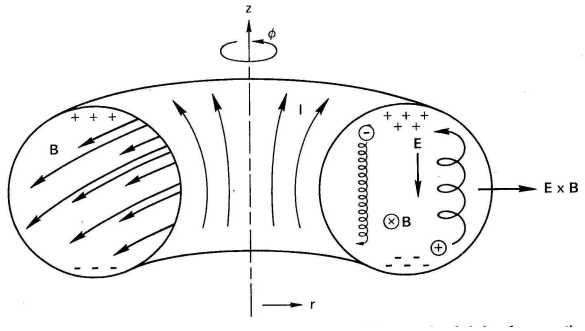


Figure 17: In a simple torus in which the lines of force are closed circles, the magnetic filed varies as 1/r. The resulting ∇B drifts cause a vertical charge separation, which in turn causes the plasma to drift outward.

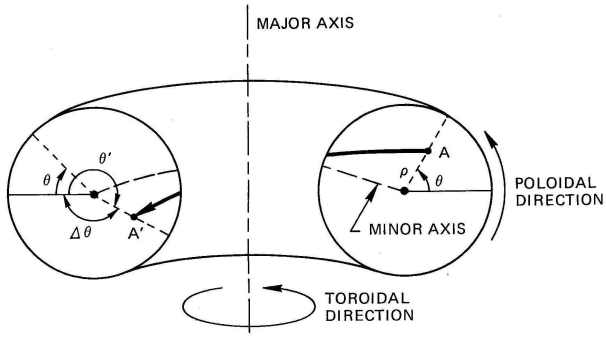


Figure 18: In a torus with rotational transform a magnetic field line $A - A'$ changes its azimuthal angle θ around the minor axis as it winds around the major axis.

die obere und untere Hälfte des Torus verbunden werden. Eine solche Verschraubung der Magnetfeldlinien macht es möglich, eine elektrische Polarisation zu vermeiden.

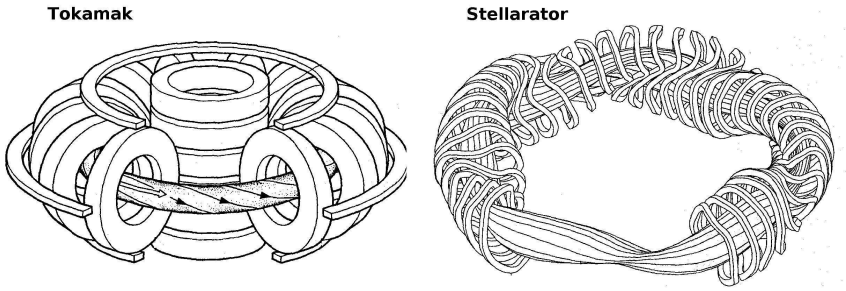


Figure 19: Tokamak (links) und ein Stellarator (rechts)

Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

- Tokamak: Ein Plasmastrom in die ϕ-Richtung erzeugt ein Poloidales Magnetfeld B_θ. Das gesamte Feld hat ϕ-(Toroidal) und θ-(Poloidal) Komponenten.
- Stellarator: Die Magnetfeldlinien werden mit geeigneten (komplizierten) Spulen erzeugt.

Diese werden in Abb. 19 schematisch dargestellt.

2.1.4 Feldgradienten parallel zu $\vec{B}$

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass ∇B parallel zu $\vec{B}$ ist ($\partial B_z/\partial z \neq 0$). Dies kann nicht die einzige Abweichung von der Gleichförmigkeit sein, da $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. In Zylinderkoordinaten gilt

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rB_r)}{\partial r} = 0 \qquad \left(\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = 0\right)$$

Da (wegen azimuthaler Symmetrie) $B_r(r=0) = 0$ gilt

$$B_\phi = 0 \qquad \text{und} \qquad B_r \approx -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}\Big|_{r=0}$$

Üblicherweise ist $v_r = \dot{r}$, $v_z = \dot{z}$, $v_\phi = r\dot{\phi}$
Wenn $E = 0$ dann lautet die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_r}{dt} &= qv_\phi B_z && (= m(\ddot{r} + r\dot{\phi}^2)) \\
\frac{dp_\phi}{dt} &= q(-v_r B_z + v_z B_r) \\
\frac{dp_z}{dt} &= -qv_\phi B_r && (= m\ddot{z})
\end{aligned}$$

Die Terme proportional zu B_z geben die gewöhnliche Gyration um die Feldlinien. Wenn das Führungszentrum auf der Achse liegt ist $r \approx r_L$, $v_\phi \approx r_L\dot{\phi} = \mp v_\perp$ (abhängig vom Vorzeichen der Ladung). Neu ist:

$$\begin{aligned}
m\dot{v}_z &= \pm qv_\perp\left(-\frac{1}{2}r_L\frac{\partial B_z}{\partial z}\right) \\
&= \mp\frac{qv_\perp^2}{2\omega_c}\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{mv_\perp^2}{2B_z}\frac{\partial B_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

Nun erinnern wir uns, dass das magnetische Moment eine rotierende Ladung ist

$$IA = \frac{q\omega_c}{2\pi}\pi r_L^2$$

und daher ist

$$\mu = \frac{qv_\perp^2}{2\omega_c} = \frac{mv_\perp^2}{2B}$$

Wir sehen, dass

$$F_z = ma_z = -\mu\frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Diese Kraft ist rein magnetisch und kann die gesamt (kinetische) Energie des Teilchens nicht ändern. Deshalb gilt

$$F_z v_z = -\mu v_z \frac{\partial B}{\partial z} = -v_z \frac{\partial}{\partial z}\big(\frac{1}{2} m v_\perp^2\big)$$

Wenn B_z größer wird, nimmt v_z ab und $v_\perp$ nimmt zu.
Behauptung: Bei einer Änderung von B_z bleibt μ konstant (r_L, bzw. $v_\perp$ ändern sich entsprechend.)
Es sei: s=Längenelement entlang $\vec{B}$ (hier z)

$$m\frac{dv_\parallel}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \qquad \text{und} \quad v_\parallel = \frac{ds}{dt}$$

Daher

$$\frac{m}{2}\frac{dv_\parallel^2}{dt} = m v_\parallel \frac{dv_\parallel}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}\frac{dB}{dt} = -\mu \frac{dB}{dt}$$

dB/dt ist die Änderung in B, die das Teilchen aufgrund seiner Bewegung "'sieht"'.
Energieerhaltung liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\big(\frac{1}{2} m v_\parallel^2 + \frac{1}{2} m v_\perp^2\big) = \frac{d}{dt}\big(\frac{1}{2} m v_\parallel^2 + \mu B\big) \\ &= -\mu \frac{dB}{dt} + \frac{d(\mu B)}{dt} = B\frac{d\mu}{dt} \end{aligned}$$

oder $d\mu/dt = 0$, ie. $v_\perp^2/B$=konst. (auch Br_L^2=konst.). Letztere ist das Theorem von Busch und wird in der Beschleunigerphysik benutzt.
Anmerkung : der Magnetische Fluss durch eine Elektronen (oder Ionen)- Bahn ist

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \pi r_L^2 B_z = \text{konst.} \quad (\text{da} \propto \mu)$$

Magnetischer Spiegel
Wenn nur Magnetfelder vorhanden sind, ist die kinetische Energie eines Teilchens konstant

$$\frac{1}{2m}(p_\parallel^2 + p_\perp^2) = \frac{m}{2}(v_\parallel^2 + v_\perp^2) = konst. = \frac{p_0^2}{2m}$$

Da das magnetische Moment $mv_\perp^2/(2B)$ auch konstant ist gilt, (falls $v_{\perp 0}$ und $v_{\parallel 0}$ die Geschwindigkeitskomponenten am am Ort $B(z) = B_0$ sind)

$$\frac{m v_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{m v_\perp^2(z)}{B(z)} \quad \text{oder} \quad v_\perp^2(z) = \frac{B(z)}{B_0} v_{\perp 0}^2$$

und

$$v_\parallel^2 = v_0^2 - v_\perp^2 = v_0^2\Big(1 - \frac{B(z)}{B_0}\frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2}\Big)$$

Für ein gegebenes Teilchen ist $v_{\perp 0}^2/v_0^2 < 1$ fest. Wenn $B(z)$ zunimmt, nimmt $v_\parallel$ ab.

Falls $B(z)$ den Wert $B_T = (v_0^2/v_{\perp 0}^2)\, B_0$ erreicht, wird $v_\parallel$ auf Null reduziert. Alle Energie ist dann in Bewegung senkrecht zum Magnetfeld umgewandelt worden.
Was passiert nun ?
Das Teilchen rotiert weiter, kehrt aber um und wandert zurück. Die Drehrichtung bleibt erhalten.
Abhängig von deren Anfangsgeschwindigkteit, bleibt ein Teil der geladenen Teilchen in einem inhomogene Magnetfeld dort, wo die Feldstärke am schwächsten ist. Dies führt zu der Idee heißes Plasma in einem Magnetischen Spiegel einzufangen.

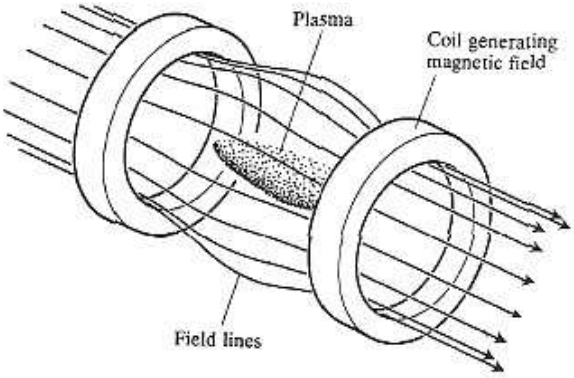


Figure 20: Magnetic trapping

Mit ausreichend großem Verhältnis B_{max}/B_0 hoffte man (mit Hilfe einiger zusätzlichen Tricks) ein heißes Plasma für die Kernfusion aufrecht zu erhalten.
(MFTFB: $B_0 \approx 3T,\ B_{Max} \approx 15T,\ L \approx 5m$). Aber die Verluste aus den Enden waren doch zu groß.

Verlustkegel (Loss Cone)
Alle Teilchen, deren Geschwindigkeit am Ort von B_0 die Ungleichung
$B_T = (v_0^2/v_\perp^2)B_0 < B_{max}$ erfüllen, werden eingefangen.
Alle Teilchen mit $v_{\parallel 0}^2/v_{\perp 0}^2 \geq (B_{max} - B_0)/B_0$ werden entweichen.
Man definiert $\tan(\theta) = v_{\perp 0}/v_{\parallel 0}$. Dann ist $\sin(\theta) = v_{\perp 0}/v_0$. Weiter wird θ_{LC} definiert: $\sin^2(\theta_{LC}) = B_0/B_{max}$. Nur Teilchen mit $\theta > \theta_{LC}$ werden eingeschlossen. Für diese gilt $v_{\perp 0}^2/v_0^2 > B_0/B_{max} = \sin^2(\theta_{LC})$.
Dies definiert ein Kegel im Geschwindigkeitsraum. Teilchen innerhalb des Kegels verschwinden schnell. Nur Teilchen außerhalb des Kegels bleiben im Plasma. Aber Stösse können Teilchen in den Verlustkegel streuen, da sich bei einem Stoß das Verhältnis $v_\perp/v_\parallel$ ändert.

Das Fangen (trapping) von Elektronen in einem ortsabhängigen Magnetfeld ist wichtig für Fusionsplasmen. Das Führungszentrum eines nicht gefangenen Teilchens folgt einer Magnetfeldlinie, die ein Helix auf einer Toroidalen Oberfläche mit Mittelpunkt auf der Achse ist. Die Magnetfeldstärke ist proportional zu $1/R$, mit $R = R_0 + r_0 \cos\theta$ (r_0 ist der kleiner Radius der toroidalen Oberfläche sich auf der das Führungszentrum befindet.
Einige Teilchen werden deswegen gefangen und werden ferngehalten vom Bereich, wo das Magnetfeld am stärksten ist (an der innen Seite des Torus). Es gilt
$B(\theta) = B_0/(1 + r_0 \cos\theta/R_0)$ mit $B_0 = B(R_0)$. Dann ist $B(\theta)/B(0) \approx (1 - \epsilon\cos\theta)/(1 - \epsilon)$ mit $\epsilon = r_0/R_0$ klein. Die Feldstärke hat ein Minimum für $\theta = 0$.

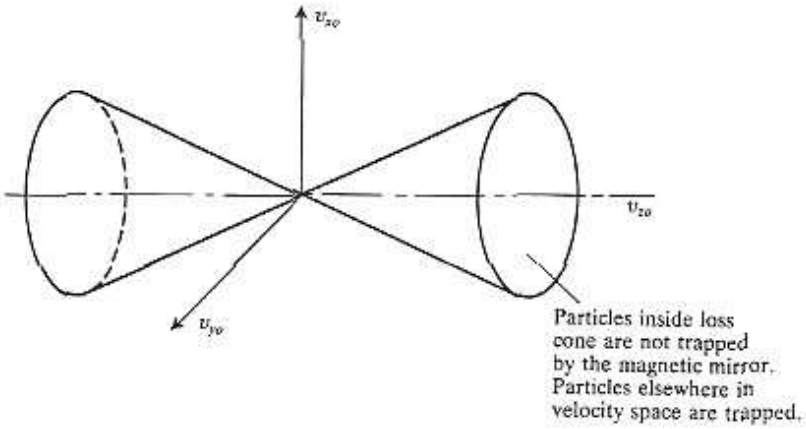


Figure 21: Loss cone

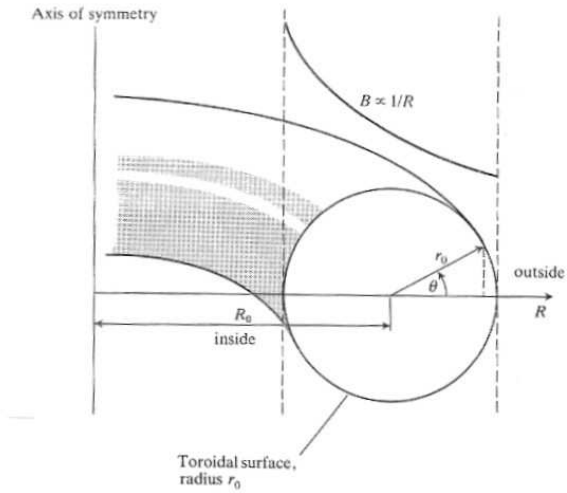


Figure 22: Strength of magnetic field as a function of position on a poloidal cross section of a tokamak.

Dann erhält man $v_\parallel^2/v_0^2 \approx 1 - (v_{\perp 0}^2/v_0^2)(1 - \epsilon\cos\theta)/(1-\epsilon)$.
So ist es möglich, dass $v_\perp$ verschwindet bevor θ den Wert π erreicht; das Teilchen kann nicht mehr den Torus umfahren. $v_\parallel$ verschwindet, wenn $v_{\parallel 0}^2/v_{\perp 0}^2 = \epsilon(1-\cos\theta)$. Nur Teilchen mit $v_{\parallel 0}^2/v_{\perp 0}^2 > 2\epsilon$ können einen Vollständigen Umlauf durchführen (passing particles). Die gefangenen Teilchen bleiben in der Nähe des äußeren Bereichs des Torus, wo die Feldstärke klein ist. Das Führungszentrum eines gefangenen Teilchens pendelt hin und her entlang einer Magnetfeldlinie auf dem äußeren Teil des Torus zwischen den Spiegelpunkten $\pm\theta_m$ (definiert durch $\epsilon(1-\cos\theta_m) = v_{\parallel 0}^2/v_{\perp 0}^2$). Solche Teilchen können nicht zum toroidalen Plasmastrom J_ϕ beitragen.
Im Projektion sieht die Bewegung des Führungszentrums eines gefangenen Teilchens wie eine Banane aus. Deshalb heißen solche Bahnen "'Banana Bahnen"'.

Anwendung in der Physik des Weltalls (hier eigentlich nur in der Nähe eines Planets)

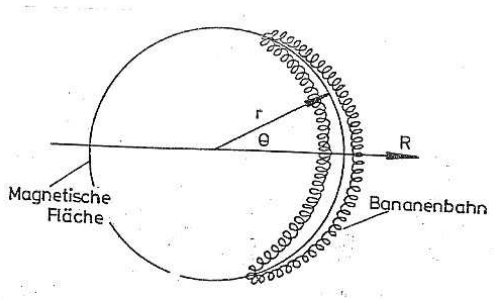


Figure 23: Die Projektion der Bahn eines gefangenen Teilchens in die poloidalebene.

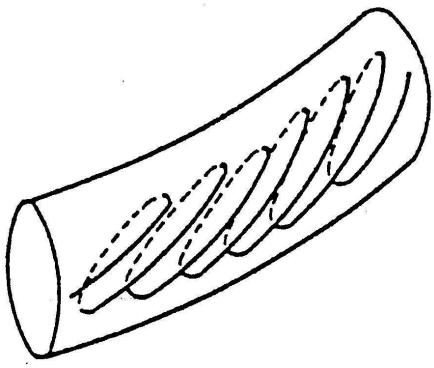


Figure 24: Teilchenbewegung in einem Tokamak: Für hinreichend kleines $v_{\parallel}^2/v_{\perp}^2$ wird das Teilchen im Gradienten des B-Feldes reflektiert. Wegen dem Drift im inhomogenen Magnetfeld (in der Zeichnung für ein Proton immer nach Oben) durchläuft das Teilchen eine sogenannte Bannanenbahn.

Ein magnetischer Spiegel tritt auch bei der Bewegung geladener Teilchen im Erdmagnetfeld auf. Betrachten wir zunächst ein Planet mit einem Dipolmagnetischen Moment $\vec{M}$. Ein von dem Sonnenwind stammendes Teilchen kann bis zur Erdoberfläche vordringen, wenn $mv_{\perp}/|q|$ gross genug ist. Wenn $mv_{\perp}/|q|$ klein ist, werden Teilchen, die nahe dem magnetischen Äquator ankommen reflektiert. Kommen sie jedoch in der Nahe des Pols an, werden sie gefangen ($B \propto M/r^3$). Auch Teilchen, die in der Ionosphäre produziert werden (z.B. durch Photoionization) können gefangen werden. Die Bewegung ist eine Gyration um die Feldlinien. da $\mu = m(v \cdot \sin\alpha)^2/(2|B|) \approx$ konst. werden Teilchen reflektiert.

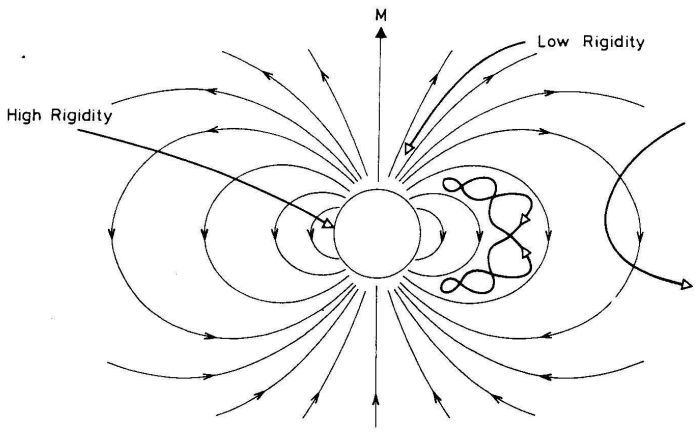


Figure 25: Model planet with dipole magnetic moment M, showing schematically particles of high magnetic rigidity gaining unrestricted access, and particles of low rigidity being repelled near the magnetic equator, gaining access in the polar regions, and executing trapped-particle motion. The magnetic rigidity is proportional to $mv_{\perp}/|q|$.

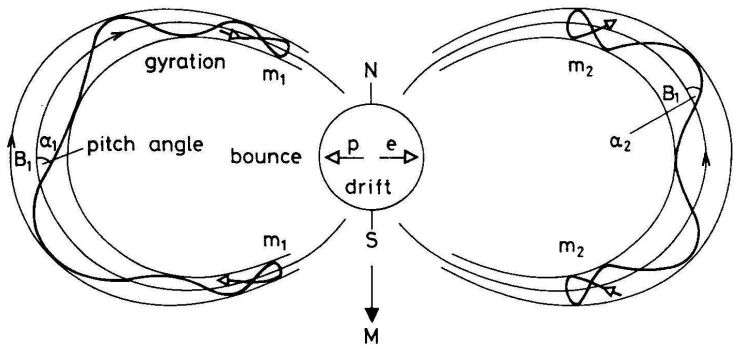


Figure 26: Illustration of the three basic modes of motion -gyration, bounce and drift- of magnetically trapped particles. Motion is shown for a plant which, like the Earth, has a southward-directed magnetic monent. For electrons, the sense of gyration is clockwise when seen looking downwards on the north geographic pole, and drift is eastwards. These are, of course, reversed for protons and other positively charged particles. Particles of pitch angle α_1, at a location where the magnetic field strength is B_1, will mirror at points m_1 lying on a surface where B=$B_1/sin^2\alpha$. For particles having larger pitch angle, for example α_2, at the same field strength, the mirror points m_2 are further from the planet. The locus of resultant motion of each particle‘s guiding center of gyration defines an approximately toroidal drift shell. See also Fig. 27

Wegen der Zunahme des Feldes zu den Polen hin entsteht ein magnetischer Spiegel, in dem Teilchen eingeschlossen werden können. Zusätzlich entsteht im inhomogenen Magnetfeld eine Krümmungs, bzw. ∇B-Drift, die dazu führt, das Elektronen und Ionen in entgegengesetzten Richtungen um die Erde driften. Der so entstehende Strom kann das Magnetfeld der Erde verändern. Teilchen die durch Stösse aus dem Spiegel entkommen, führen beim Eintritt in die Atmosphäre zu den Nordlichtern.

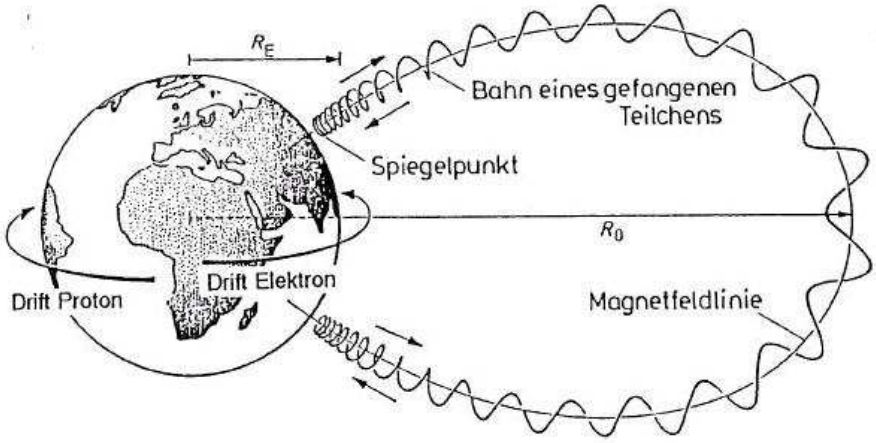


Figure 27: Bewegung eines geladenen Teilchens im Erdmagnetfeld mit Drifts und magnetischem Spiegel.

2.1.5 Polarisationsdrift

Ein weiterer Drift ist der sogenannte Polarisationsdrift und hat seinen Ursprung in sich zeitlich ändernden (oft oszillierenden) elektrischen Feldern (wobei die Frequenz nicht zu groß sein soll). Dies ist z.B. der Fall in einem Tokamak, da der Strom durch ein zeitlich veränderliches Magnetfeld induziert wird.
Einfachheitshalber werden $\vec{E}$ und $\vec{B}$ als beinah ortsunabhängig angesehen.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t = Re(E_0 \hat{x} e^{i\omega t})$$
$$B \approx B_0 \hat{z}$$

dann ist

$$\frac{dv_x}{dt} = (\pm)\omega_c v_y + \frac{q}{m} E_x(t)$$
$$\frac{dv_y}{dt} = (\mp)\omega_c v_x$$
$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega_c^2 v_x + \frac{q}{m}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$
$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega_c^2 v_y + \frac{q^2 B}{m^2} E_x = -\omega_c^2 (v_y + \frac{E_x}{B})$$

Man sieht den $(\vec{E} \times \vec{B})/B^2$-Drift, aber es bleibt auch ein Zusatz zu $\ddot{v}_x$, nämlich

$$v_p = \frac{q\dot{E}_x}{m\omega_c^2} = \pm \frac{1}{\omega_c}\frac{\dot{E}_x}{B_z}$$

in die x-Richtung. Dies ist der Polarisationsdrift. (alles ist konsistent, solange $\omega \propto \left| \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t} \right| \ll \omega_c$).

Die Komponente senkrecht auf $\vec{B}$ ist

$$\vec{v}_{p\perp} = \frac{m}{qB^2}\frac{\partial \vec{E}_\perp}{\partial t}$$

Dieser Drift (in die x-Richtung) verursacht einen Polarisationsstrom parallel zu $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:

$$\vec{j}_p = ne(\vec{v}_{ip} - \vec{v}_{ep}) = \frac{n}{B^2}(m_i + m_e)\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Analog zu einem festen Dielektrikum $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Hier ist

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_{pol}$$

Die Dipole bestehen aus Elektronen und Ionen. Bei statischen Feldern herrscht Ladungsneutralität im Innern des Plasmas. Falls die Felder sich zeitlich ändern, bewirkt die Trägheit der Ionen einen Strom.
Effektiv wird die dielektrische Konstante:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{|j_p|}{|\dot{E}|} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_0 + \frac{n(m_i + m_e)}{B^2} = \epsilon_0 + \frac{\rho_m}{B^2}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \frac{\mu_0 c^2 \rho_m}{B^2})$$

ρ_m ist die Massendichte. Im allgemeinen ist ϵ ein Tensor, besonders im Magnetfeld.
Zahlen: In einem Wasserstoffplasma mit $n \approx 10^{16}\, m^{-3}$ und $B = 0.1\, T$ ist $\mu_0 c^2 \rho_m / B^2 \approx 189$.
Für Deuterium mit $n \approx 10^{19}\, m^{-3}$ und $B = 5\, T$ ist $\mu_0 c^2 \rho_m / B^2 \approx 151$
In der Ionosphäre mit $n \approx 10^{12}\, m^{-3}$ und $B = 3 \cdot 10^{-5}\, T$ ist $\mu_0 c^2 \rho_m / B^2 \approx 2 \cdot 10^5$

Anders betrachtet

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 (j_{ext} + j_{pol} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \\ &= \mu_0 (j_{ext} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j_{pol} + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

und somit

$$\epsilon_\perp = \epsilon_0 + \frac{\rho_m}{B^2} = \epsilon_0 (1 + \mu_0 c^2 \frac{\rho_m}{B^2})$$

Dies gilt allerdings nur für sich langsam ändernde Felder. Das Thema dielektrische Eigenschaften eines Plasmas wird später ausführlicher behandelt (ϵ_R ist Frequenzabhängig!).
Aber nun untersuchen wir das Verhalten eines Plasmas in einem Gravitationsfeld, um besser zu verstehen, wie die (senkrechte) Dielektrizität die Bewegung das Plasma beeinflusst (vorausgesetzt ein Magnetfeld sei auch vorhanden).

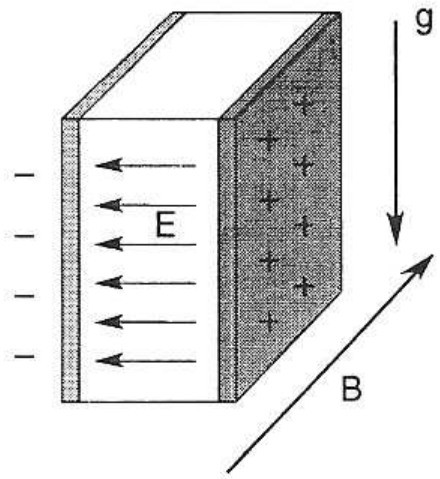


Figure 28: Scheibegeometrie für die Untersuchung des Verhaltens eines Plasmas in einem Gravitationsfeld

Um die Rechnung etwas zu vereinfachen, betrachten wir eine Scheibe von magnetisiertem Plasma. Die Ionen seien einfach ionisiert mit $Z_i = 1$ und damit $q = +e$ und $n_e = n_i = n$. Der Gravitationsdrift erzeugt einen Strom, der senkrecht auf $\vec{B}$ und auf $\vec{g}$ steht. Aus $\vec{v}_g = m\vec{g} \times \vec{B}/(qB^2)$ erhält man

$$\vec{j}_g = \sum nq\vec{v}_g = \sum mn\frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2} = \rho_m \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}$$

Im Bild zeigt die Stromdichte nach rechts. Diese wird nun als extern betrachtet. Die Stromdichte soll aber verschwinden auserhalb des Plasmas. Dies führt zu einer "'freien"' Oberflächenladungsdichte σ_s mit $d\sigma_s/dt = \vec{j}_g$ (Die Ladungen sammeln sich an den Oberflächen des Plasmas). Nun gilt auch $d\sigma_s/dt = \epsilon_\perp \, dE_\perp/dt$, wie in einem Plattenkondensator. Daraus folgt

$$\frac{dE_\perp}{dt} = \frac{1}{\epsilon_\perp}\frac{d\sigma_s}{dt} = \frac{j_g}{\epsilon_\perp} \qquad \text{mit} \qquad \epsilon_\perp = \epsilon_0 + \frac{\rho_m}{B^2}$$

und somit

$$\frac{dE_\perp}{dt} = \frac{(\vec{g} \times \vec{B})}{1 + \epsilon_0 B^2/\rho_m}$$

Nun kann man dies auch interpretieren als

$$\vec{j}_g = \rho_m \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_{pol} \qquad \text{mit} \quad \vec{j}_{pol} = \frac{\rho_m}{B^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Auf jeden Fall findet man

$$\frac{\rho_m}{B^2}\, \vec{g} \times \vec{B} = \big(\epsilon_0 + \frac{\rho_m}{B^2}\big)\frac{\partial \vec{E}_\perp}{\partial t}$$

Wenn ein elektrisches Feld vorhanden ist, gibt es einen $\vec{E} \times \vec{B}/B^2$ - Drift.

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \qquad \text{mit} \quad \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \frac{d\vec{E}_\perp/dt \times \vec{B}}{B^2} = \frac{1}{1+\epsilon_0 B^2/\rho_m}\left[\frac{(\vec{g} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{B^2}\right]$$

Nun ist

$$(\vec{g} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \vec{B}(\vec{g} \cdot \vec{B}) - \vec{g}B^2 = -\vec{g}B^2$$

und somit

$$\frac{d\vec{v}_E}{dt} = \frac{-\vec{g}}{1+\epsilon_0\, B^2/\rho_m}$$

Die Führungszentren "'fallen"' unter dem Einfluss der Gravitation.
Der Drift erfährt eine Beschleunigung und die Teilchen verlieren gravitationspotentielle Energie, und gewinnen kinetische Energie. Die Energiebilanz lautet

$$\frac{d}{dt}(\frac{\rho_m v_E^2}{2}) = \rho_m \vec{v}_E \cdot \frac{d\vec{v}_E}{dt} = \frac{-\rho_m \vec{v}_E \cdot \vec{g}}{1+\epsilon_0 B^2/\rho_m}$$

Man muss auch beachten, dass die interne Energie des elektrischen Feldes gegeben ist durch

$$\epsilon_0 \frac{E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 B2}{2} v_E^2 = \frac{\epsilon_0 B^2}{\rho_m}\frac{\rho_m v_E^2}{2}$$

Die Leistung des Gravitationsfeldes auf das Plasma ist

$$\rho_m \vec{v}_E \cdot \vec{g} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\rho_m v_E^2}{2} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right]$$

Nun ist $\rho_m/(\epsilon_0 B^2) \gg 1$ (gewöhnlich) und damit wird nur ein kleiner Teil der Lageenergie des Plasmas auf sein internes elektrisches Feld übertragen. Der Effekt kann als Aufladen eines "'Plasmakondensators"' interpretiert werden.

Übungen

1. Wiederholen Sie Aufgabe 3 aus Abschnitt 1, und dazu berechnen Sie die Elektronenzyklotronfrequenz und Larmorradius (wenn B≠0) für:

a) ein Fusionsplasma mit kT=10 keV, B=5 T und n=10^{20} m^{-3}
b) die Ionosphäre mit kT=0.1 eV, B=$3 \cdot 10^{-5}$ T und n=10^{12} m^{-3}
d) den Sonnenkorona mit kT=100 eV, B=10^{-9} T und n=10^{13} m^{-3}
e) den Sonnenwind mit kT=5 eV, B=10^{-8} T und n=$5 \cdot 10^6$ m^{-3}
e) eine Gasentladung mit kT=2 eV, B=0 und n=10^{16} m^{-3}

Sie können annehmen, dass $v_\perp \approx \sqrt{2kT/m_e}$. Vergleichen Sie λ_D und r_L mit den Dimensionen des Plasmas. Vergleichen Sie auch die Plasmafrequenz mit der Elektronenzyklotronfrequenz.

2. Die Ionosphäre besteht zum grössten Teil aus einem Proton-Elektron-Plasma im Magnetfeld der Erde (B=$3 \cdot 10^{-5}$ T). Wie gross ist die Gravitationsdrift der beide Teilchenarten? (Radius der Erde ≈ 6400 km, Höhe der Ionosphäre ≈ 300 km).

3a. Zeigen Sie, daš das magnetische Moment einer Ladung, die sich auf einer Kreisbahn bewegt, ist

$$\mu \;=\; \frac{qv_\perp^2}{2\omega_c} \;=\; \frac{mv_\perp^2}{2B}$$

3b. Eine Ladung bewegt sich auf einer Kreisbahn um eine Magnetfeldlinie. Wie gross is der Magnetfluss durch die Bahn?

4. Das Magnetfeld der Erde beträgt ca 3×10^{-5} T am Equator und fällt wie r^{-3} (wie ein ideales Dipol) ab:

$$B \;=\; 3 \times 10^{-5} \left(\frac{R_e}{r}\right)^3 \; T$$

Man nehme an, daš es eine isotropischen Verteilung Ionen mit kT=1 eV und Elektronen mit kT=30 keV, jeweils der Dichte 10^7 m^{-3} bei r = 5 R_e in der Equatorebene gibt
a) Berechnen Sie die Driftgeschwindigkeiten der Ionen und der Elektronen aufgrund der grad(B)-Drift. Vergleichen Sie diese mit der Gravitationsdrift.
b) In welcher Richtung driftet ein Elektron, bzw. ein Ion?
c) Wie lang braucht ein Elektron, bzw. ein Ion, um einmal um die Erde zu driften?
d) Wie gross ist die Stromdichte rings um die Erde?
e) Wie gross ist die Zyklotron-Periode jeder Teilchensorte (angenommen, die Ionen seien Protonen)?
(Die Krümmungsdrift sollte eigentlich auch berücksichtigt werden, ist aber in diesem Fall unwichtig).

5. In einer axialsymmetrischen Spulenanordnung ist das Magnetfeld auf der z-Achse in die z-Richtung:

$$\vec{B}(0,z) \;=\; B_0(z)\;\hat{z}$$

Aus div($\vec{B}$) = 0, schätzen Sie B_r in der Nähe der z-Achse ab.

6. Durch adiabatische Komprimierung kann ein Plasma geheizt werden, da $kT_\perp$ zusammen mit B wachesen muss, wegen der Invarianz von μ. (Das Magnetfeld wird langsam erhöht). Die Lorentzkraft $q\;\vec{v} \times \vec{B}$ kann aber die Teilchen nicht beschleunigen. Wie gewinnen die Teilchen kinetische Energie?
(Hinweis: denken Sie an das Faraday'schen Gesetz).

7. Ein Teilchen mit der Ladung q (und Masse m) startet von der Ursprung mit Impuls p, in eine Richtung, die den Winkel θ_0 mit einer Magnetfeldlinie. Dort hat das Magnetfeld den Wert B_0. Bei welchem Wert B des Magnetfelds wird das Teilchen reflektiert?
Nun sei B_{max} der Maximalwert des Magnetfeldes. Bei welchen Werten von θ_0 wird das Teilchen nicht reflektiert? (Dieser Winkel definiert einen Kegel in Geschwindigkeitsraum: der *Verlustkegel*).

8. Ein System von N nicht wechselwirkende Elektronen in einem gleichförmigen Magnetfeld hat ursprünglich eine isotrope Geschwindigkeitsverteilung. Der Betrag der Geschwindigkeit sei v_0 für alle Elektronen. Nun wird das Magnetfeld adiabatisch erhöht, von B_1 bis $B_2 = \alpha B_1$. Berechnen Sie die Änderung der Energie des Systems.

3 Plasma als Flüssigkeit - Hydrodynamische Modelle

Eine vollständige quantitative Beschreibung eines Plasmas auf Grund der Bewegung einzelner Teilchen ($10^{12} - 10^{20}$ pro cm^3) ist nicht praktikabel. Es gibt einfach zu viele Teilchen. Bei hydrodynamischen Modellen wird die Bewegung der einzelnen Teilchen nicht berücksichtigt. Stattdessen wird die Bewegung von makroskopischen "'Flüssigkeitselementen"' beschrieben. Wie in einem Gas, sind die Teilchen in einer Flüssigkeit nicht korreliert. Deren Zufallsbewegung in einem Element (mit Stössen) erzeugt Druck und die Temperatur ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie.
Die Dichte eines Plasmas hat nur dann physikalische Bedeutung, wenn die Skalenlänge so groß ist das viele Teilchen berücksichtigt werden. Das Plasma ist elektrisch neutral über solche Längenskalen auch sollen die Zeitskalen viel größer sein, als die Perioden aller relevanten Oszillatoren :

$$T \gg \frac{2\pi}{\omega_{ci}} \quad (\text{auch} \gg \frac{2\pi}{\omega_{ce}}, \frac{2\pi}{\omega_{pe}}, \frac{2\pi}{\omega_{pi}} \text{ und} \gg \text{Zeit zwischen 2 Stössen})$$

Dann sind nur die gemittelten Positionen der Führungszentren relevant.
(Die Mittlere interne Energie $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n^{-1/3}} \ll k_B T$ ist eine notwendige Voraussetzung).
Eine Möglichkeit ist eine 2-Flüssigkeiten Beschreibung (Elektronen, Ionen evtl. auch Neutralteilchen getrennt zu behandeln. Die Kopplung geschieht über Wechselwirkung mit elektrischen und magnetischen Feldern.)

3.1 Magnetohydrodynamik (MHD)

Die MHD macht eine weitere Näherung. Das Plasma besteht aus geladenen Teilchen unterschiedlicher Masse. Makroskopisch ist es elektrisch Neutral. Man kann es dann als eine einzige elektrisch neutrale, leitende Flüssigkeit ansehen, da über längere Zeitskalen die sehr mobile Elektronen das Plasma neutral halten und elektrische Felder kompensieren. Dies ermöglicht es auch, dass eine Stromdichte $\vec{J}$ fast nur von den Elektronen getragen wird, während das Plasma als ganzes sich mit der Strömungsgeschwindigkeit bewegt.
(genauer: $\vec{v}$ beschreibt die Schwerpunktsbewegung

$$\vec{v} \simeq \frac{m_i \vec{v_i} + m_e \vec{v_e}}{m_i + m_e}$$

wobei $\vec{v}_e$ und $\vec{v}_i$ die Geschwindigkeiten der Elektronen bzw. Ionen sind. Dann ist die elektrische Stromdichte $\vec{J} = en(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$ unabhängig von $\vec{v}$.
Die Flüssigkeit wird als Kontinuum behandelt; die wichtigste Gleichungen beschreiben Masse, Impuls und Energie.
Wir zerlegen nun das Plasma in Flüssigkeitselemente der Volumen V (deren Länge $\Delta l \ll L$ aber $\Delta l \gg$ mittlere freie Weglänge zwischen Stössen). Dies hat nur dann einen Sinn, wenn sehr viele Teilchen sich in diesem Element befinden, damit lokale Temperatur, Druck, Dichte usw. definiert werden können.
Man betrachtet nun entweder ein kleines Flüssigkeitselement oder eine Eigenschaft der Flüssigkeit die durch ein Festes Volumenelement mitgetragen wird. z.B. die Masse (oder Teilchenzahl), die in das Volumenelement in der Zeit Δt fliesst ist (in Abb. 29)

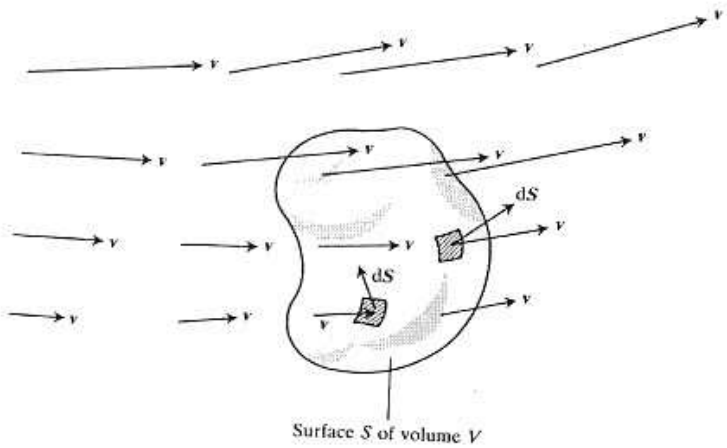


Figure 29: Fluid flow through a volume V.

$$\rho v_x \Delta t \Delta y \Delta z - \big[\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta x\big]\Delta t \Delta y \Delta z + (\text{Beiträge von den anderen Seiten})$$
$$= -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

Die Zunahme in der Zeit Δt ist

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)\Delta t$$

Da die Masse (bzw. Teilchenzahl) erhalten ist gilt :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Dies ist die *Kontinuitätsgleichung.* Analog für die elektrische Ladung gilt

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{j}_{el}) = 0$$

mit $\rho_{el} = \sum q_i n_i - e n_e \simeq 0$ und $\vec{j}_{el} = \sum q_i n_i \vec{v}_i - e n_e \vec{v}_e$

Impuls: Um die Zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitselements zu beschreiben, muss man auch die Bewegung des Flüssigkeitselements berücksichtigen. Hierzu wird zuerst gefragt: wie ändert sich eine (skalare) Eigenschaft eines Flüssigkeitselements, wenn dieses sich von (x, y, z) bis $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ in der Zeit Δt bewegt? Für jede beliebige Funktion $G(\vec{x}, t)$ gilt:

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial G}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t$$

mit $\Delta \vec{x} = \vec{v}\Delta t$, erhält man

$$\frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}v_x + \frac{\partial G}{\partial y}v_y + \frac{\partial G}{\partial z}v_z$$

und somit

$$\frac{dG}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) G$$

Die Gesamtableitung enthält 2 Beitrage:
$\frac{\partial G}{\partial t}$ = ist die Änderung an einem festen Ort und
$(\vec{v} \cdot \nabla)G$ ist die Änderung auf Grund der Tatsache, dass der Beobachter sich mit der Flüssigkeit bewegt.
Anwendung auf Plasma: $G = v_x,\ v_y,$ oder v_z (oder die mechanische Impulsdichte $mn\vec{v}$).
Dann ist (für jede Teilchensorte)

$$m_\alpha n_\alpha \left(\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + (\vec{v}_\alpha \cdot \nabla)\vec{v}_\alpha \right) = \text{Kraftdichte}$$

Wenn wir ein 2-Flüssigkeitsmodel nehmen, können wir die Kräfte als

$$n_\alpha q_\alpha (\vec{E} + \vec{v}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla p_\alpha + m_\alpha n_\alpha \vec{g} + \ldots$$

schreiben, wobei ... andere Kräfte wie z.B. Reibung aufgrund von Stössen mit anderen Teilchen bedeuten kann.
Es wurde *auch* angenommen, dass der Druck $p = nk_BT$ isotrop sei. Falls die Flüssigkeit eine Viskosität besitzt, oder Scherkräfte wichtig sind, wird der Druck ein Tensor. Dies kommt in einem Plasma aber sehr selten vor.
Ein voll ionisiertes Plasma ist eigentlich eine Mischung zweier Flüssigkeiten - eine Ionenflüssigkeit und eine Elektronenflüssigkeit. Bei Teilionisation kommen Neutralteilchen hinzu.
Oft erhält man eine ausreichend gute Beschreibung, wenn man das Plasma als eine einzige elektrisch neutrale aber gut leitende Flüssigkeit ansieht. In diesem Fall ist die Strömungsgeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit der ganzen Flüssigkeit und die Stromdichte ist unabhängig davon. In diesem Fall gilt (hier ohne Beweis)

$$\rho_m \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho_m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho_m \vec{g} + \ldots$$

Alles, was von der Lorentz Kraft bleibt ist $\vec{j} \times \vec{B}$; die Effekte des elektrischen Feldes heben sich gegenseitig weitgehend weg.
Dazu kommen natürlich die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0\ ,\ \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\rho_{el}}{\epsilon_0} \simeq 0$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \ \text{ und } \ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

und das verallgemeinerte Ohm'sche Gesetz. In einem Bezugssystem, in dem die Flüssigkeit in Ruhe ist, gilt

$$\vec{j}' = \sigma \vec{E}' = \frac{1}{\eta} \vec{E}'$$

Wenn das Flüssigkeitselement sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zu einem Labormagnetfeld $\vec{B}$ bewegt, gibt es ein elektrisches Feld im Ruhesystem des Flüssigkeitselements. Allgemein gilt:

$$\vec{E}' \simeq \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}$$

(solange v^2/c^2 vernachlässigbar ist).
Eine Konsequenz des Ohm'schen Gesetzes ist: Wenn eine leitende Flüssigkeit sich in einem Magnetfeld bewegt, gibt es ein elektrisches Feld

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} + \eta \vec{j}$$

Wenn das Plasma unendlich gut leitet, gilt $\eta = 1/\sigma \to 0$
Und eigentlich sollte man berücksichtigen, dass die Leitfähigkeit senkrecht und parallel zum Magnetfeld unterschiedlich sein kann

$$\eta \vec{j} \to \eta_{\parallel} \vec{j}_{\parallel} + \eta_{\perp} \vec{j}_{\perp}$$

Eine andere Konsequenz der MHD ist, dass Magnetfeldlinien auf Grund der Plasmabewegung verschoben werden können und dass die Feldlinien in das Plasma hinein diffundieren können. Aber zuerst eine genauere Untersuchung der $\vec{j} \times \vec{B}$-Kraft:
Von den Maxwells'chen Gleichungen, wissen wir, dass

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \simeq \mu_0 \vec{j}$$

Wenn der Verschiebungsstrom klein ist, gilt

$$\begin{aligned} \vec{j} \times \vec{B} \simeq & \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \\ = & \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \end{aligned}$$

Dann kann man die Bewegungsgleichung schreiben als

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

Der erste Teil entspricht einem magnetischen Druck $B^2/(2\mu_0)$. Der andere Term entspricht einer magnetischen Spannkraft. Sie ist nur dann vorhanden, wenn die Feldlinien gekrümmt sind. Der Effekt wirkt so, das die Krümmung reduziert wird.
Manchmal ist es hilfreich, das ganze von einem anderen Standpunkt zu betrachten.
$\hat{b}$ ist ein Einheitsvektor parallel zu $\vec{B}$ und $\hat{n}$ ist ein Einheitsvektor $\perp \vec{B}$. R ist der lokale Krümmungsradius und s sei der Abstand entlang einer Feldlinie. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} = & \frac{1}{\mu_0} \left[B \frac{\partial B}{\partial s} \hat{b} + B^2 \frac{\partial \hat{b}}{\partial s} \right] \\ = & \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\partial \hat{b}}{\partial s} + \hat{b} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \end{aligned}$$

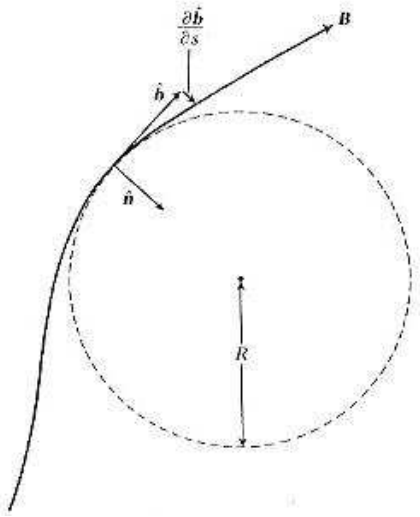


Figure 30: $\dfrac{\partial \hat{b}}{\partial s}$ in a magnetic field $\vec{B}$.

Nun ist $\dfrac{\partial \hat{b}}{\partial s} = \dfrac{\hat{n}}{R}$ und man erhält

$$\vec{j} \times \vec{B} = \underbrace{-\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \hat{b} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right)}_{-\nabla_\perp \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right)} + \frac{B^2 \hat{n}}{\mu_0 R}$$

Der magnetische Druck wirkt hauptsächlich senkrecht zum Magnetfeld. Die Flüssigkeit wird weg von Bereichen mit hohem Magnetfeld geschoben.
Die Spannkraft $\dfrac{B^2}{\mu_0} \dfrac{\hat{n}}{R}$ beschleunigt das Plasma in Richtung Zentrum der Krümmung. Wie wir sehen werden, werden die Feldlinien mit dem Plasma mitgezogen. Die Krümmung wird dadurch reduziert.
Magnetische Kräfte kennt man: wenn gleiche Ströme in einer Menge parallel Leiter fliesst, wirkt eine gegenseitige anziehende Kraft darauf. Dies erzeugt einen sogenannten "'pinch"' (Abb. 31). Andererseits, in einer kreisförmigen Schleife, die Ströme auf die zwei Seiten der Schleife fliessen in die entgegengesetzte Richtung und stossen sich gegenseitig ab ("'hoop"' Kraft). Das gleiche passiert in Plasmen, wenn ein Magnetfeld vorhanden ist.

Zustandsgleichung
Bis jetzt haben wir Gleichungen für die Masse, Elektrische Ladung und Stromdichte und Strömungsgeschwindigkeit (bzw. Impulsdichte) gegeben. Es fehlt noch etwas über Energie (Wärmetransport usw). Dies wird durch eine thermodynamische Zustandsgleichung näherungsweise beschrieben. Dabei handelt es sich um eine Gleichung der Form $p = cn^\gamma$ (oder $p = c\rho^\gamma$), die den Druck p und die Dichten verknüpft. Die Grösse γ gibt an wie stark die Temperatur des Plasmas steigt, wenn es komprimiert wird. Die Zustandsgleichung gibt eine einfache (aber auch nur eingeschränkt gültige) Beschreibung des Wärmeflusses. Ausserdem wird die Zustandsgleichung benötigt, um eine vollständigen Satz Gleichungen für die Beschreibung des Systems zu gewährleisten.

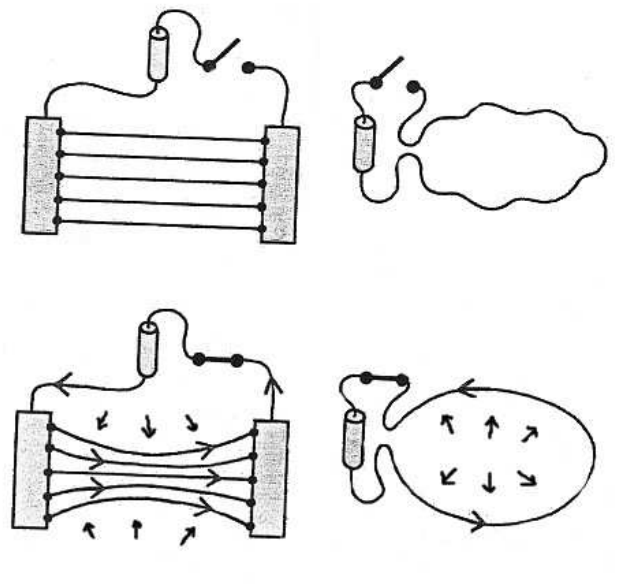


Figure 31: The pinch effect (left) and the hoop force (right).

Es handelt sich um insgesamt 15 Unbekannte:

$$\rho_m,\ p,\ (\rho_{el}) \quad (2 \text{ bzw. } 3) \quad \text{und} \quad \vec{v},\ \vec{j}_{el},\ \vec{E},\ \vec{B} \quad (4\text{x}3)$$

die durch 16 Gleichungen zu beschreiben sind:

Kontinuität	(1)
Bewegung	(3 Komponenten)
Ladungserhaltung	(1)
Maxwell (3+3+1+1)	(8)
Ohm	(3 Komponenten)

Aber die Gleichungen für Ladungserhaltung und die Maxwellgleichungen sind nicht alle voneinander unabhängig. Man nehme die Divergenz von jeder der 2 Rotationsgleichungen

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \mu_0 \left[\nabla \cdot \vec{j}_{el} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{E}\right)\right] = \mu_0 \left[\nabla \cdot \vec{j}_{el} + \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t}\right] = 0$$

d.h. 2 der Gleichungen sind triviale Konsequenzen der Anderen. Deshalb wird eine weitere Gleichung benötigt. Dies ist gerade die Zustandsgleichung.

- Bei einer Kompression, die im Vergleich zur Wärmeleitung langsam stattfindet, gilt $\gamma = 1$. Es handelt dich um eine isotherme Kompression. Die Temperatur bleibt konstant. Häufig führt die Tatsache, dass die Teilchen sich längs eines Magnetfeldes $\vec{B}$ frei bewegen können, zu einem Strom entlang $\vec{B}$ und ermöglicht, dass das Plasma isotherm bleibt.

- Wenn die Kompression schneller als die Wärmeleitung erfolgt, ist sie adiabatisch. Wenn sie auch langsam genug ist, dass Energie durch Stösse zwischen den 3 Freiheitsgraden ausgetauscht werden kann, gilt $\gamma = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$ (allgemeine Beziehung für ein ideales Gas mit 3 Freiheitsgraden)
- Auch möglich ist eine adiabatische Kompression die schnell im Vergleich zur Stossrate und anisotrop ist. Die Freiheitsgrade parallel und senkrecht zum Magnetfeld sind entkoppelt. Dann hat man Zustandsgleichungen für parallele ($N = 1$, $\gamma = 3$) und senkrechte ($N = 2$, $\gamma = 2$) Bewgungen.

Wie wir sehen werden, werden die Feldlinien mit dem Plasma mitgezogen. Die Krümmung wird dadurch reduziert.
Bei Gleichgewicht (nicht immer stabil) gilt

$$0 = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p$$

- die Stromlinien und Magnetfeldlinien liegen auf Flächen konstanten Drucks
- $\nabla(p + B^2/(2\mu_0)) - (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}/(2\mu_0) = 0$

Wenn der zweite Term aus Symmetriegründen sehr klein ist, gilt

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} \simeq konst$$

Da der Druck in der Mitte eines Plasmas meistens höher als auf dem Rand ist, ist das Magnetfeld in der Mitte kleiner als auf dem Rand. Diese Abschwächung ist ein Beispiel für den Diamagnetismus des Plasmas.
Das Verhältnis von Plasmadruck zum magnetischen Druck, normalerweise ausserhalb des Plasmas gemessen wird mit β bezeichnet:

$$\beta = \frac{p_{zentral}}{B^2_{Aussen}/(2\mu_0)}$$

oder

$$\beta = \frac{\langle p \rangle}{B_0^2/(2\mu_0)}$$

wobei $\langle p \rangle$ der Mittelwert des Drucks ist. Für Laborplasmen gilt allgemein (da der Druck ausserhalb des Plasmas verschwindet)

$$\frac{B^2_{aussen}}{2\mu_0} = p + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Die Grösse β ist ein Mass dafür, wie sehr das Magnetfeld dazu beiträgt, ein inhomogenes Plasma im Gleichgewicht zu halten.

In astrophysikalischen Plasmen ist $\beta \gtrsim 1$
Im Labor gilt eher $\beta < 0.1$

Für Kernfusion: Da die Fusionsleistung mit dem Druck zunimmt, möchte man in einem Tokamak (bzw. Stellarator oder Spiegelmaschine) β möglichst gross haben.
Stabilitätsüberlegungen liefern Grenzen: hier $\beta \lesssim 0.05 - 0.10$.

Da Druckgradient und Lorentzkraft sich gerade Kompensieren, muss ein Strom fliessen (senkrecht zu ∇p und B). Wie schon erwähnt, bei Gleichgewicht gilt

$$\vec{j} \times \vec{B} - \nabla p = 0$$

$$(\vec{j} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \nabla p \times \vec{B}$$

Daraus folgt

$$\vec{j}_\perp = -\frac{\nabla p \times \vec{B}}{B^2}$$

$\vec{j}_\perp$ heisst diamagnetischer Strom und verursacht eine Abschwächung von $\vec{B}$.
Diese Stromdichte entsteht aus langsamen (im Vergleich zu $r_L \omega_c$) Drifts der Elektronen und Ionen in entgegengesetzten Richtungen

$$\vec{j}_D = ne\,(\vec{v}_{Di} - \vec{v}_{De}) = (\gamma_i k_B T_i + \gamma_e k_B T_e)\,\frac{\vec{B} \times \nabla n}{B^2}$$

Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld, das gegen das ursprüngliche Zeigt.
Beispiel : ein zylindrisches Plasma mit p_{max} auf der Achse.

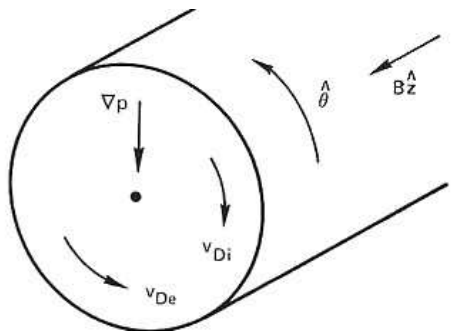


Figure 32: Diamagnetic drifts in a cylindrical plasma

∇p zeigt radial nach innen. Falls $\vec{B}$ parallel zur Achse ist, muss die nach Aussen gerichtete Druckkraft durch die Lorentzkraft ($\vec{j}_D \times \vec{B} = j_\theta B_z$) kompensiert werden.

$$j_\theta = (\gamma_i k_B T_i + \gamma_e k_B T_e)\frac{1}{B}\frac{\partial n}{\partial r}$$

Allgemeiner: die Flüssigkeit schlingt sich um die Magnetfeldlinien. Da $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ und $\vec{j}_\perp = (\vec{B} \times \nabla p)/B^2 \neq 0$ muss auch $\vec{j}_\parallel \neq 0$ $(\vec{j} = \vec{j}_\perp + j_\parallel \hat{b})$, aber $\vec{B} \cdot \nabla(j_\parallel/B) + \nabla \cdot \vec{j}_\perp = 0$.
Man kann diese Drifts qualitativ wie folgt verstehen: Durch ein festes Flüssigkeitselement bewegen sich mehr Ionen nach unten als nach oben, da die Dichte der sich nach Unten bewegenden Ionen größer ist (Elektronen nach oben, gleiche Überlegung). Die Führungszentren bewegen sich nicht aber die Flüssigkeit driftet. Jedes Teilchen, nach dem es sich durch ein Flüssigkeitselement bewegt hat, dreht einfach weiter, deshalb gibt es kein Teilchen Transport.
Dagegen gibt es im Flüssigkeitsmodell keinen $\nabla\,|B|$, bzw. Krümmungsdrift. Jedes Führungszentrum hat eine Driftbewegung. Diese heben sich alle Weg in jedem beliebigen Flüssigkeitselement (nach Mittelung über die Geschwindigkeitsverteilung).

Figure 33: Origin of the diamagnetic drift.

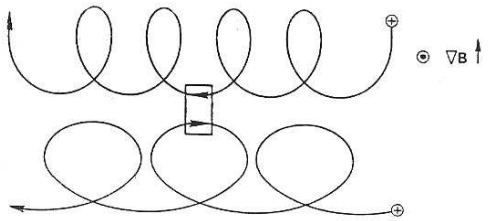


Figure 34: Im Flüssigkeitselement sind die Geschwindigkeiten gleich aber entgegengesetzt. Der Beitrag zum Mittelwert von $\vec{v}$ ist Null.

3.1.1 Der Zylindrische "'Pinch"'

Dies kann erzeugt werden, indem man eine hohe Spannung an ein Paar Elektroden anlegt und dadurch eine Entladung mit $\vec{j}$ in die z-Richtung induziert. Gleichgewicht (nicht sehr stabil) wird hergestellt, wenn das dadurch induzierte Magnetfeld gerade so ist, dass $\vec{j} \times \vec{B} = j_z B_\theta$ genau den Druckgradient dp/dr kompensiert. Allgemein gilt

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0}{r} \int_0^r r' j_z(r') dr'$$

Falls das Plasma nur für $r \leq a$ vorhanden ist gilt: für $r \geq a$ ist $p(r) = 0$ und

$$I = \int_0^a 2\pi r j_z(r) dr \quad \text{und} \quad B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(soweit bekannte Elektrodynamik)

Nun gilt auch $\left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} = -\hat{r}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}$$

Dies ist die r-Komponente von

$$0 = -\left(\nabla p + \frac{\nabla B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}}{\mu_0}.$$

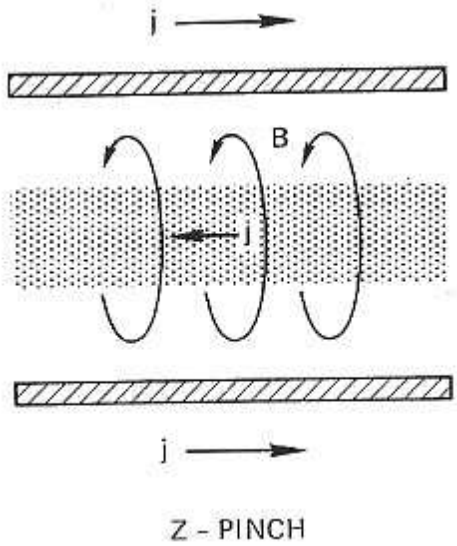


Figure 35: Geometry of a z-pinch.

Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dr} &= -\frac{d}{dr}\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \\ &= -\frac{1}{2\mu_0}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 B_\theta^2\right)\end{aligned}$$

Deswegen gilt

$$p(r) \;=\; p_0 - \frac{1}{2\mu_0}\int\limits_0^r \frac{1}{r'^2}\frac{d}{dr'}\left(r'^2 B_\theta^2\right) dr'$$

Wenn a der Plasmaradius ist, gilt

$$I = \int\limits_0^a 2\pi r j_z(r) dr$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,, \qquad r > a$$

$$p_0 = \frac{1}{2\mu_0}\int\limits_0^a \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 B_\theta^2\right) dr$$

(da $p(a) = 0$). Bisher ist alles <u>unabhängig</u> von der Stromdichte!)

Der mittlerer Druck ist

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &= \left[2\pi\int_0^a rp(r)dr\right]\frac{1}{\pi a^2} = \frac{1}{a^2}\left[\left(r^2p\right)\Big|_0^a - \int_0^a r^2\frac{dp}{dr}dr\right]\\ &= p(a) + \frac{1}{a^2}\int_0^a \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2B^2}{2\mu_0}\right)dr = 0 + \frac{B^2(a)}{2\mu_0}\\ &= \text{ magnetischer Druck an der Oberfläche}\end{aligned}$$

Auch ist $\mu_0 j_z(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rB_\theta)}{\partial r}$.
Wenn $j_z = j_{z0}$, $\quad r \le a$ und $j_z = 0$, $\quad r > a$ auch gilt ist

$$\begin{aligned}B_\theta(r) &= B_{\theta a}\left(\frac{r}{a}\right), \qquad r \le a\\ p(r) &= p_0 - \frac{B_{\theta a}^2 r^2}{\mu_0 a^2}\\ B_{\theta a} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\end{aligned}$$

und aus p(a)=0 gilt

$$p_0 = \frac{B_{\theta a}^2}{\mu_0}$$

Stabilität:
Die Stabilität unter kleinen Störungen wird untersucht.
1: Kontraktion eines Plasmasäules unter Flusserhaltung:
An einer Stelle z_0 geht $a \to a - \delta a$. I bleibt konstant, B_θ wird etwas grösser an dieser Stelle und der Effekt verstärkt sich (Würstchen-Instabilität).

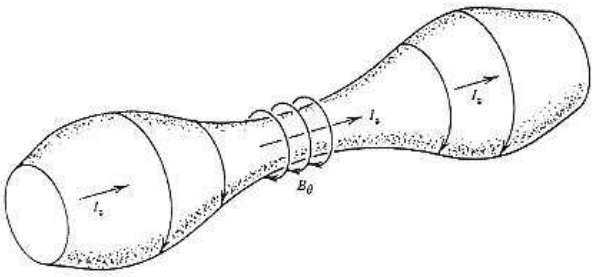


Figure 36: Examples of mhd instabilities of a straight plasma column: sausage instability.

2. Krümmung einer Plasmasäule. Innerhalb wird B_θ etwas grösser und an der anderen Seite wird B_θ etwas kleiner. Wieder wird der Effekt verstärkt. (Kink- oder Schlangen-Instabilität, s. Abb. 37).

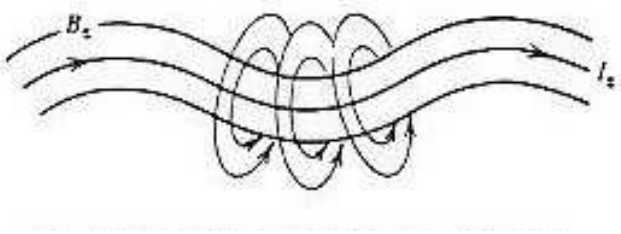


Figure 37: Examples of mhd instabilities of a straight plasma column: kink instability.

3.1.2 Weitere Folgen

Nun kommen wir zurück zu den Grundgleichungen
Wir kombinieren zunächst das Ohm'sche Gesetz mit dem Faraday'schen Gesetz

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \nabla \times \left(\eta \vec{j} - \vec{v} \times \vec{B}\right) \\ &= \nabla \times \left(-\vec{v} \times \vec{B} + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}\right) \end{aligned}$$

(wiederum wurde der Verschiebungsstrom vernachlässigt)
Nun gilt

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$$

Dann ist

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B}$$

Der 1. Term beschreibt Konvektion des Feldes mit dem Plasma
Der 2. Term beschreibt die Diffusion des Feldes durch das Plasma.
Wir nehmen zunächst an, daß $\vec{v}$ klein ist und $\eta \neq 0$; in diesem Fall erhalten wir eine Diffusionsgleichung für $\vec{B}$:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \simeq \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B}$$

Die Feldlinien werden in das Plasma hinein diffundieren.
Wenn jede Komponente von $\vec{B}$ diese Gleichung getrennt erfüllt kann man eine Lösung mit Hilfe eines Seperationsansatzes $B(\vec{r}, t) = X(\vec{r})\Theta(t)$ finden:

$$X\dot{\Theta} = \frac{\eta}{\mu_0} \Theta \nabla^2 X$$
$$\frac{\dot{\Theta}}{\Theta} = \frac{\eta}{\mu_0} \frac{1}{X} \nabla^2 X$$

Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur r abhängt müssen sie jeweils getrennt von einander Konstant sein.

$$\frac{\dot{\Theta}}{\Theta} \sim (-)\frac{1}{\tau}$$
$$\text{und } \frac{1}{X}\nabla^2 X = (-)\frac{\mu_0}{\eta\tau} = (-)\frac{1}{L^2}$$

die Feldlinien dringen in das Plasma hinein mit der charakteristischen Zeit $\tau \sim \mu_0 L^2/\eta$ wobei L in etwa den Plasmadimensionen entspricht. Ein Zahlenbeispiel befindet sich in den Übungen.

Wenn die Feldlinien in das Plasma hineindringen, werden Ströme induziert. Dies wiederum erzeugt Ohm'sche Heizung. Die Energie hierfür kommt aus der Energie der elektrischen und magnetischen Felder.

Eine kleine Energiebilanz: die Leistung die das Plasma gegen die $\vec{j} \times \vec{B}$-Kraft bringt ist

$$\begin{aligned}\left(\vec{j} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v} &= -\vec{j} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \\ &= \vec{j} \cdot \vec{E} - \eta j^2 \\ &= -\eta j^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right)\end{aligned}$$

Nun gilt (Vektorindentität)

$$\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right) = -\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) + \vec{B} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right)$$

und (Faraday)

$$\vec{B} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2}\right)$$

So gilt

$$\begin{aligned}\left(\vec{j} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v} &= -\eta j^2 - \frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)}{\mu_0} \\ &= -\eta j^2 - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) - \nabla \cdot \vec{S}\end{aligned}$$

mit

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$ = Poynting Vektor; $B^2/(2\mu_0)$=Energie Dichte und ηj^2=Verlustleistung.

Wenn $\vec{v} \simeq 0$ schätzen wir ab, wie lang es dauert, bis das Magnetfeld abnimmt:

$$B \propto B_0 e^{-t/\tau}$$
$$|j| \sim \frac{|B|}{\mu_0 L} \quad ; \quad \eta j^2 \sim \frac{\eta B^2}{\mu_0^2 L^2} \sim \frac{B^2}{\mu_0 L}$$

Eine Andere Folge ist die "'Reconnection"' der Feldlinien in Grenzschichten.

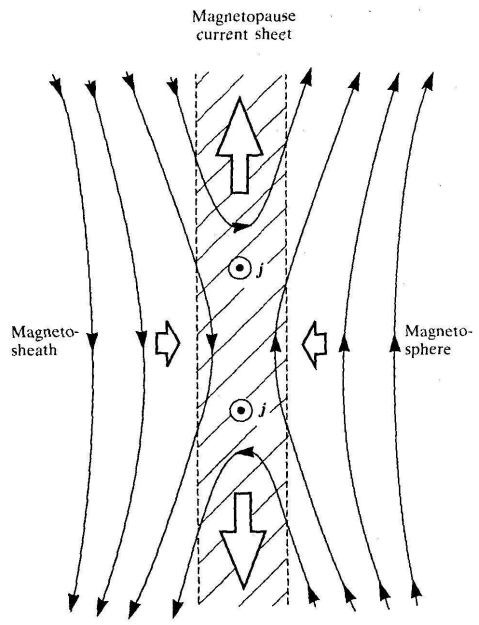


Figure 38: Effect of magnetic reconnection at a current sheet (hatched region). The current $\vec{j}$ points out of the plane of the diagram (circled dots). The arrowed solid lines show the magnetic field lines, while the large arrows show the direction of plasma motion.

Annahme: $\sigma \to \infty$, $\eta \to 0$, außer in einer dünnen Stromschicht, der zwei Bereiche trennt, in dem die Feldlinien entgegengesetzt sind, wie im Fig. 38.
Diffusion der Magnetfeldlinien in diese Schicht erlaubt Durchdringen. Wo die Linien treffen, formen sie sich um. Dann wirkt $\vec{j} \times \vec{B}$ als Spannkraft und beschleunigt das Plasma weg. Dies ist wichtig in der Grenzschicht zwischen Sonnenwind und Erdmagnetfeld (Magnetopause). Dort ist es hauptverantwortlich für das Nordlicht. Man glaubt dass dies ein wichtiger Mechanismus für die Energie Umwandlung im Sonnensystem ist (Heizung des Koronas unter Anderem). Siehe die Literaturhinweise am Ende dieses Abschnitts.
Es passiert auch in Fusionsplasmen (s. Fig 39) und man glaubt, dass es hier bei Instabilitäten in Tokamakplasmen eine Rolle spielt, die allerdings noch nicht sehr gut verstanden ist.
Eine Weitere Konsequenz des verallgemeinerten Ohm'schen Gesetzes

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}$$

ist, dass wenn $\eta \to 0$ (unendlich gut leitendes Plasma) und auch $\vec{v} \to 0$ (Ruhesystem) ist $\vec{E} = 0$. Dann ist $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}$ auch $= 0$. Wenn $\eta \to 0$ und $\vec{v} \neq 0$ (sogar ordentlich gross), dann ist das Magnetfeld im Plasma "'eingefroren"'. Der Strom, der das Magnetfeld aufrecht hält, zirkuliert (fast) verlustfrei.
Anschaulich - wieso sind Magnetfeldlinien eingefroren ?
In einem Plasma werden elektrische Felder abgeschirmt. Vor allem, wenn die elektrische Leitfähigkeit sehr gross wird, kann kein elektrisches Feld (im Bezugssystem des sich bewegenden Plasmas) vorhanden sein. Aber dann kann das Plasma sich nicht relativ zum Magnetfeld bewegen, da sonst ein elektrisches Feld induziert werden (Faraday). Die

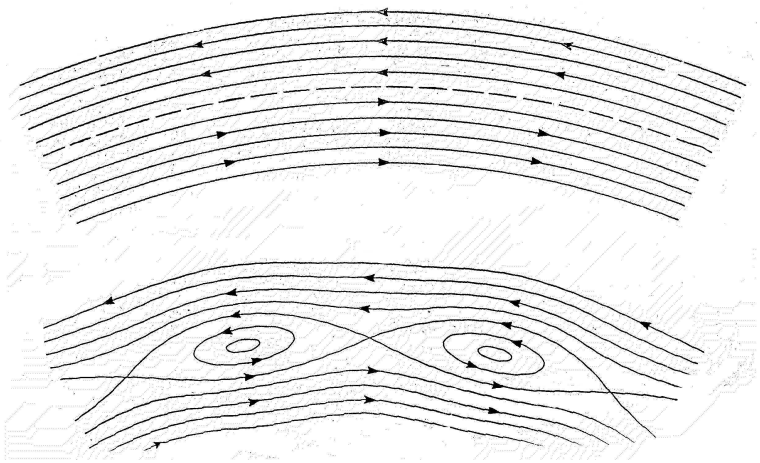


Figure 39: Formation of magnetic islands in a tokamak as a result of reconnection of the magnetic field lines.

Magnetfeldlinien müssen sich mit dem Plasma bewegen und zwar so, dass die Ströme die Feldlinien nie überkreuzen.
Die $\vec{j} \times \vec{B}$ Kraft bewirkt, dass Plasma und Feldlinien sich zusammen bewegen.
In starken magnetischen Felder ist r_L sehr klein; die Bewegung ist fast nur Strömung entlang der Feldlinien.
Im Idealfall gilt :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B} - \eta \vec{j}\right) \\ &\simeq \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\end{aligned}$$

Auch im bewegten Plasma bleibt das Magnetfeld "'eingefroren"'. Teilchen, die zu irgend einem Zeitpunkt durch eine Feldlinie gebunden sind, bleiben so. Wenn die Teilchen sich bewegen, bewegen sich die die Feldlinien mit und können ziemlich verformt werden. Die Magnetische Spannkraft (aus $\vec{j} \times \vec{B}$) versucht, diese Verformung zu verhindern, sie wirkt gegen Plasmabewegungen, die eine Gradient oder Krümmung in $\vec{B}$ verursachen würden.

Es gibt zwei Betrachtungsweise :
1) Wenn die kinetische Energie des fließenden Plasmas grösser ist als die Energiedichte des Feldes ($B^2/(2\mu_0)$), werden die Feldlinien mit transportiert und verformt (gute Näherung für den Sonnenwind bei Abständen > einige Sonnenradien).
2) Wenn die Energiedichte des Magnetfeldes grösser ist als die Energiedichte des strömenden Plasmas ($\rho v^2/2$) ist, dann werden die Teilchen mit den sich bewegenden Magnetflusslinien gefangen (z.B. in der Magnetosphäre).
Diese Trennung ist nur dann sinnvoll, wenn ein Aspekt wirklich dominiert.

Nun betrachten wir genauer die zeitliche Entwicklung von $\vec{B}$ für Zeiten viel kleiner als die Diffusionszeit τ. Zur guten Näherung gilt

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \simeq \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Um zu präzisieren was "'einfrieren der Feldlinien"' bedeutet betrachten wir den Magnetischen Fluss durch eine Oberfläche S (die sich bewegt) auf Fläche 1:

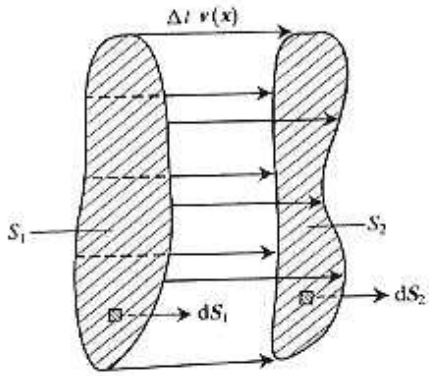


Figure 40: New surface S_2 generated by fluid motion from S_1.

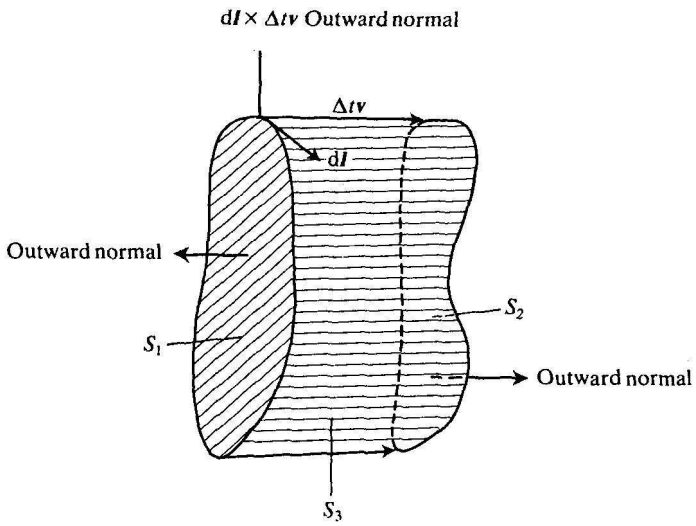


Figure 41: Closed surface formed by S_1, S_2, and S_3.

$\Phi_1 = \int \vec{B}\left(\vec{x}, t\right) \cdot d\vec{s}_1$
auf Fläche 2: $\Phi_2 = \int \vec{B}\left(\vec{x} + \vec{v}\Delta t, t + \Delta t\right) \cdot d\vec{s}_2$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{1}{\Delta t}\left(\Phi_2 - \Phi_1\right)$$

in einem Volumen, das durch S_1, S_2 und die Spuren des Randes von S eingeschlossen wird, gilt

$$0 = \int \left(\nabla \cdot \vec{B}\right) d^3x = \int \vec{B}\left(\vec{x} + \vec{v}\Delta t, t\right) \cdot d\vec{s}_2 - \int \vec{B}\left(\vec{x}, t\right) \cdot d\vec{s}_1 - \oint \vec{B} \cdot \left(\vec{v}\Delta t \times d\vec{l}\right)$$

Gauss's theorem applies only to simultaneous values of $\vec{B}$! Der letzte Term ist der Fluss durch die Seitenoberfläche. Umformen ergibt

$$0 = \int \left[\vec{B}(\vec{x} + \vec{v}\Delta t, t + \Delta t) - \Delta t \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \cdot d\vec{s}_2 - \int \vec{B}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{s}_1 - \oint (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} \Delta t$$

$$= [\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \underbrace{\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}}_{\text{änderung wegen Zeitabhängigkeit von B}} - \underbrace{\oint (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l}}_{\text{Fluss aus der bewegten Oberfläche}}] \Delta t$$

Nach dem Theorem von Stokes ist: $\oint \left(\vec{B} \times \vec{v} \right) d\vec{l} = \int \nabla \times \left(\vec{B} \times \vec{v} \right) d\vec{s}$

Ergebnis : $\frac{d\Phi}{dt} = \int \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{s}.$

Für ein unendlich gut leitendes Plasma ist die RHS gleich Null. Der Fluss bleibt dann Konstant, auch wenn das Plasma durch Bewegung seine Form ändert.

Eigentlich gilt $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times \left(\vec{B} \times \vec{v} \right) = -\nabla \times \left(\eta \vec{j} \right)$ (Ohmsche' Verluste ändern den Fluss).

Plasmen haben oft sehr hohe Leitfähigkeit (Vergleichbar mit Kupfer bei Zimmertemperatur. Dies gilt auch bei sehr kleinen Dichten (Vergleich: $n_e \sim 10^{25} - 10^{28}/m^3$ in Festkörpern, ca. $10^{20}/m^3$ in Fusionsplasma, viel weniger im Weltraum). Dies ist so, weil eine hohe Dichte $\rightarrow$ viele Stösse, was eine reduzierte Leitfähigkeit verursachen würde, aber es gibt auch viele Ladungsträger; eine niedrige Dichte bedeutet weniger Stösse, aber auch wenige Ladungsträger. Die Effekte heben sich weg und die Leitfähigkeit ist fast unabhängig von der Dichte.

Magnetische Flussröhren (Magnetic Flux Tubes)

Wenn der magnetische Fluss durch eine Oberfläche, die mit der Flüssigkeit konvektiert wird, erhalten bleibt, ist es möglich, eine Gruppe Feldlinien zu finden, die als Grenze eines bestimmten Volumen betrachtet werden kann. Wir definieren eine geschlossene Kurve, die eine kleine (aber nicht infinitesimale) Oberfläche begrenzt, und durch die der magnetische Fluss nicht verschwindet. Nun folgt man jeder Feldlinie innerhalb diese Kurve, eine beliebige Abstand weg von der ursprünglichen Kurve und definiere eine weiter Kurve, die duch die selben Feldlinien durchgezogen wird. Dies definiert ein "'magnetisches Flussrohr"'. Der magnetische Fluss durch die Seiten des Rohrs verschwindet und da der Fluss erhalten ist, bleibt er Null.

Wenn das Flussrohr durch Plasmabewegung deformiert wird, bleibt die Identität des Flussrohrs erhalten, auch wenn das Flussrohr ziemlich verbogen, oder mit anderen Flussröhren verheddert wird. Die Topologie der Feldlinien kann sich nur dann ändern, wenn Rekonnection stattfindet.

Magnetische Reynoldszahl:

Wann werden die Feldlinien wirklich "'eingefroren"' und wann ist Diffusion wichtig? Hierfür definiert man eine "'magnetische Reynoldszahl"'

$$R_m = \frac{\mu_0 v L}{\eta} = \frac{v\tau}{L}$$

a) Wenn η klein und/oder v gross ist (Sonnenwind, Geomagnetismus) dann ist$R_m \gg 1$. Die Feldlinien werden eingefroren und Diffusion ist unwichtig

b) Wenn η gross oder v klein ist, ist $R_m \ll 1$. Diffusion dominiert (Metall).

Wenn $R_m \gg 1$ ist die Geschwindigkeit der Flusslinien senkrecht zu $\vec{B}$ ungefähr $(\vec{E} \times \vec{B})/B^2$ (die Feldlinien bewegen sich mit dem Plasma).
Dies folgt ebenfalls aus:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{j} \times \vec{B} = \vec{F} + \frac{\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \times \vec{B}}{\eta}$$
$$= \vec{F} + \frac{B^2}{\eta} \left(\vec{v}_E - \vec{v}_\perp\right)$$

mit $\vec{F} = \rho\vec{g} - \nabla p$.
Wenn B^2/η sehr gross ist, dann ist $\vec{v}_\perp \simeq \vec{v}_E$. Nur die Bewegung parallel zum Magnetfeld wird durch nicht E-M Kräfte bestimmt.

3.1.3 Der Sonnenwind

Auf der (sichtbaren) Sonnenoberfläche ist die Gastemperatur ca. 6000 K (Schwarzer Strahler). Aber in der Corona erhöht sich die Temperatur auf Werte um die 10^6 K ($\simeq 100$ eV), aus Gründen die man nicht so richtig versteht. Das Plasma besteht aus völlig ionisiertem Wasserstoff (plus etwas Helium). Einige Teilchen können die Fluchtgeschwindigkeit erreichen und die Corona dehnt sich aus mit geschwindigkeiten von einigen 100 km/s (400-500 km/s, aber einige mit noch mehr). Dies ist der Sonnenwind. Da der Abstand Erde-Sonne $150 \cdot 10^6$ km beträgt, brauchen die Teilchen des Sonnenwindes 4 Tage, um die Erde zu erreichen.

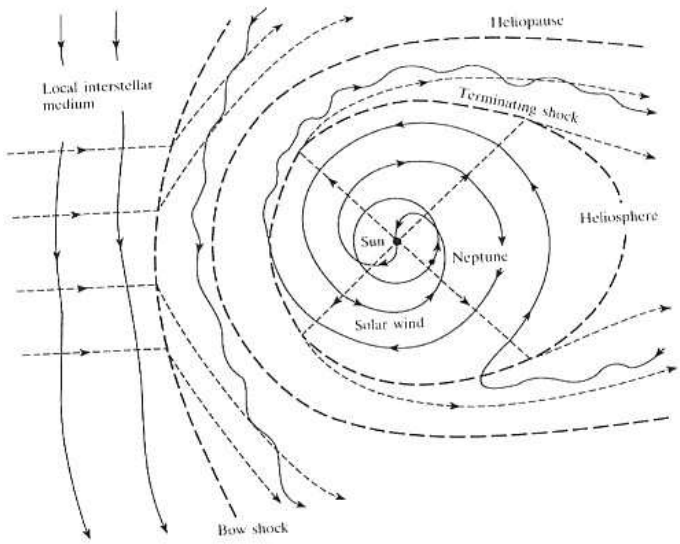


Figure 42: Sketch showing the theoretically expected interaction between the solar wind plasma and the local interstellar medium, looking down on the equatorial plane of the sun.

Die Teilchendichte ist $n_p \sim n_e \sim 10^7\, m^{-3}$.
Der Sonnenwind ist ein sehr gut leitendes Plasma und er transportiert die Magnetfeldlinien der Sonne hinaus in die Heliosphäre. Dies ist die Ursache für das Interplanetare Magnetfeld (IMF).
Jedes Plasmaelement des Sonnenwind verlässt die Sonnencorona radial nach aussen. Die "Füsse" der Feldlinien bleiben auf der sich drehenden Sonne. Die Feldlinien werden, solange keine weitere Komplikationen entstehen, in Spiralen gewickelt. (Parker Spirals).
Dies wurde schon 1963-1964 durch Sateliten messungen bestätigt. In der Nähe der Erdbahn (um die Sonne) ist die Richtung des IMF in der Bahnebene etwa 45° relativ zur Linie, Erde-Sonne. Das Erdfeld nahe des Äquators beträgt ca $30\mu T$; das IMF ist etwa $5nT$ ($5 \times 10^{-3}\mu T$). Aber der Teilchenfluss aus der Sonne ist alles andere als stetig und gleichmässig. Dies gilt dann für den Sonnenwind und für das IMF.
Manchmal kommt es vor, dass schnelles Plasma im Sonnenwind langsameres überholt. Dies führt zur Kompression (und Ausdünnung) der Teilchendichte und des Magnetfeldes. Eine Instabilität im Sonnenkorona kann einen grösseren Masseausstoss verursachen, was wiederum eine Schockwelle im Sonnenwind auslöst. Das Bild des Parkerspirals gibt einen brauchbaren Mittelwert, ist schon komplex. Hinzu kommen schlecht verstandene Fluktuationen in Raum und Zeit.

3.1.4 Magnetische Rekonnection in der Magnetosphäre

Eine Konsequenz der Wechselwirkung zwischen dem Sonnenwind und dem Erdmagnetfeld ist die Magnetosphäre. Bei hohen Breitengraden wird das Erdmagnetfeld mit dem IMF verbunden, was quasi-offene Feldlinien ergibt (die geschlossene Feldlinien werden an beiden Enden mit der Erde verbunden). Hier geht es um die Grenze (an der Magnetopause) zwischen dem IMF und dem Erdmagnetfeld an der Tagesseite. Diese Feldlinien werden im Sonnenwind an einem Ende "'eingefroren"', fliessen damit von der Tagesseite zur Nachtseite. Dabei werden die Feldlinien in einen langen Schweif ausgestreckt. Es entstehen zwei Bündel entgegengesetzter Feldlinien, mit einem Ende an einem der zwei Polen und einem Ende in den Sonnenwind. Ausserdem gibt es Rekonnektion zwischen den Flusslinien in der Mittelebene des Schweifes (Magnetotail). Siehe Fig. 43. Die Rekonnektion im Magnetotail wurde im Jahr 1999 zum ersten Mal mit dem WIND Raumsonde beobachtet (Die Auswertung der Daten erfolgte etwas später). Dies war mehr oder weniger ein Zufall, da die genaue Zeit und Ort nicht vorhersehbar sind. Die Daten können eine Idee geben, wie der notwendige elektrische Widerstand zustande kommt. Auf Grund irgendeiner Fluktuation druckt der Sonnenwind zwei Feldlinien etwas zusammen (s. Fig. 44). Wenn der Abstand zwischen zwei davon etwa den Ionenzyklotronradius ($r_{L,i} \simeq 700\,\mathrm{km}$) erreicht, können die Führungszentren der Ionen sich nicht mehr nur entlang den Feldlinien bewegen. Die Elektronen hingegen strömen wieter nach Innen ($r_{L,e} \simeq 20\,\mathrm{km}$). Hier in diesem dünnen Bereich findet die Rekonnektion statt. Im ganzen Bereich ist die Bewegung der Ionen und der Elektronen unterschiedlich. Dies verursacht elektrische Ströme und elektrische und magnetische Felder, analog dem Hall-Effekt. Diese Felder sind senkrecht auf den Magnetotail. Die Raumsonde WIND hat diese Ströme und das entsprechende Magnetfeld beobachtet.

Literatur:
S.W.H. Cowley *The plasma environment Progress of the Earth* , Contemporary Physics, vol.

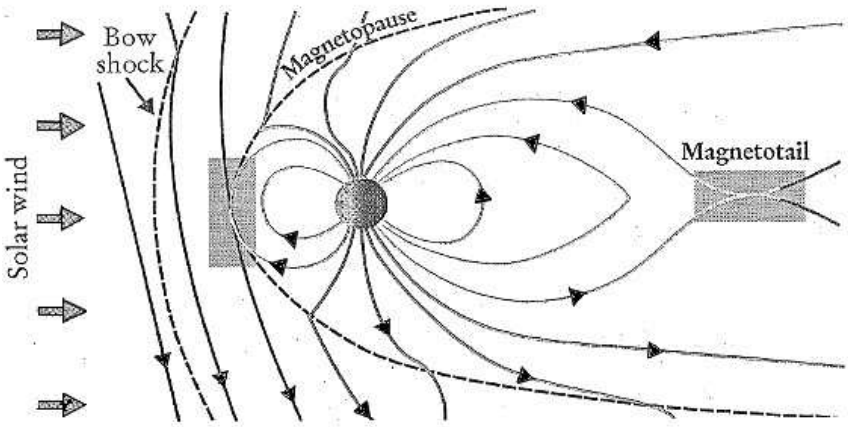


Figure 43: Magnetic Reconnection can occur in two magnetospheric regions indicated here in gray: at the magnetopause and in the magnetotail.

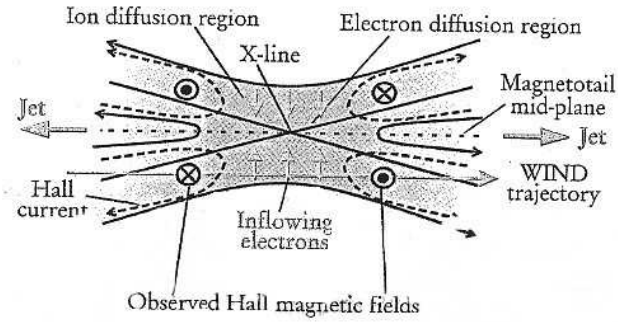


Figure 44: The WIND spacecraft flew through a reconnection event in April, 1999. Its trajectory took it through the Hall-like system of magnetic fields and electric currents established by inflowing electrons during reconnection.

32, pp. 235-250 (1991)

Spacecraft Probes the Site of Magnetic Reconnection in the Earth's Magnetotail , Physics Today, October, 2001, pp. 16-17

P.M. Bellan *Simulating Solar Prominences in the Laboratory* , American Scientist, vol. 88, pp. 136-143 (2000)

Übungen

1. Berechnen Sie den magnetischen Druck, der einem Magnetfeld von 1 T entspricht. (magnetischer Druck = $B^2/2\mu_0$)

2. Der Sonnenwind besteht aus einem diffusen Plasma, das auswärts von der Sonne strömt. Seine Dichte und Geschwindingkeit sind nicht konstant. Als Mittlewerte gelten ungefähr $n_{sw} = 4 \times 10^6$ Protonen pro m^{-3} und $v_{sw} = 4 \times 10^5$ m/s. Das Magnetfeld der Erde kann den Sonnenwind ablenken. Der Rand zwischen dem interplanetaren Plasma und der Magnetosphäre heisst Magnetopause. Wenn R der Abstand zur Mitte der Erde (in Einheiten des Erdradius) ist, gilt $B \simeq 3 \times 10^{-5}/R^3$ T. Schätzen Sie den Abstand zur Magnetopause in Sonnenrichtung ab.

3. Zeigen Sie, dass die zwei Divergenzgleichungen bei den Maxwellgleichungen (plus Kontinuitätsgleichung) das System überbestimmen. Die Gleichungen lauten:

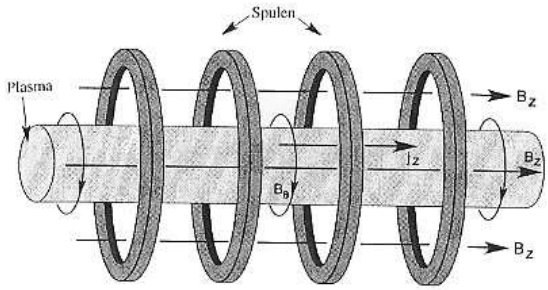
$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \cdot \vec{E} &= \rho/\epsilon_0 \\
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot \vec{j}
\end{aligned}$$

4. Ein zylindersymmetrisches Plasma trägt einen zeitlich konstanten Strom, dessen Stromdichte als $J_z(r)$ beschrieben lässt (alle andere Komponenten seien gleich Null). r ist der Abstand zur z-Achse.
a) Berechnen Sie das Magnetfeld als Funktion von r.
b) Schreiben Sie einen Ausdruck für $J_z(r)$ als Funktion vom Magnetfeld und seine Ableitungen.
c) Zeigen Sie, dass die $\vec{J} \times \vec{B}$ Kraft radial nach Innen zeigt, mit dem Betrag

$$\frac{1}{2\mu_0 r^2} \frac{d[r^2 B^2(r)]}{dr}$$

Vergleichen Sie dies mit dem Gradient des magnetischen Drucks. d) Das Plasma sei in Gleichgewicht und der Druck verschwinde am Plasmarand r=a. Berechnen Sie den Druck p(r).

5. Ein zylindersymmetrisches Plasma trägt einen zeitlich konstanten Strom, dessen Stromdichte als $J_z(r)$ beschrieben lässt. Zusätzlich wird ein starkes Magnetfeld in die z-Richtung durch Spulen erzeugt. (s. Bild). Der Druck soll klein verglichen mit dem magnetische Druck sein, und fällt zum Plasmarand (r=a) auf Null ab.



Wie lautet die Gleichgewichtsbedingung in diesem Fall? Zeigen Sie, dass

$$p(r) \; - \; p_0 \; = \; - \frac{1}{2\mu_0} \, [B_z^2(r) \; + \; B_\theta^2(r) \; - \; B_{z0}^2 \; - \; 2 \int \frac{B_\theta^2(r')}{r'} dr']$$

Unter welchen Bedingungen ist das Plasma diamagnetisch ($B_z(a) \; > B_{z0}$)?
Geben Sie einen expliziten Ausdruck für eine homogenen Stromverteilung.

6. Schätzen Sie die Diffusionszeit

$$\tau \; = \; \frac{\mu_0}{\eta} \, L^2$$

für den Eisenkern der Erde ab, mit $L \approx 1000 \, km$ und $\eta \approx 10^{-7} \Omega \, cm$.

7. Eine zylindersymmetrische Plasmasäule in einem gleichförmigen Magnetfeld hat die Dichte

$$n(r) \; = \; n_0 \, exp(-r^2/r_0^2).$$

Es gilt auch

$$n(r) \; = \; n_0 \, exp(e\Phi/kT_e).$$

Mit $\vec{E} \; = \; - \, grad(\Phi)$, zeigen Sie, dass $\vec{v}_E$ und $\vec{v}_D$ gleich und entgegengesetzt sind.

Zeigen Sie, dass das Plasma wie ein starrer Körper rotiert.

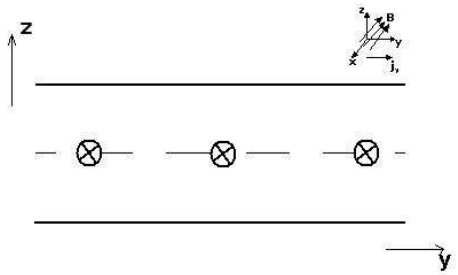
Berechnen Sie die diamagnetischen Stomdichte $\vec{j}_D$ als Funktion des Radius. Berechnen Sie auch den Zahlenwert für B = 0.4 T, $n_0 \; = \; 10^{16} \; m^{-3}$, kT = 0.25 eV, $r \; = \; r_0 \; = \; 0.01 \; m$.

Um wieviel wird das Magnetfeld B auf der Achse durch den diamagnetischen Strom reduziert? Hierfür ist die Anwendung des Durchflutungsgesetz auf einen geeigneten Weg nützlich.

8. Schätzen Sie die magnetischen Reynoldszahlen ab für
   a) ein Fusionsplasma mit kT=10 keV, B=5 T, L=1 m und n=$10^{20} \; m^{-3}$
   b) den Sonnenkorona mit kT=100 eV, B=10^{-9} T, L=10^8 m und n=$10^{13} \; m^{-3}$

In beiden Fällen können Sie annehmen, dass der Widerstand mit ca. $2 \cdot 10^{-8} \; \Omega m$ etwa so gross ist wie der von Kupfer. Für die Strömungsgeschwindigkeit (der Protonen) nehmen Sie die thermische Geschwindigkeit $v \approx \sqrt{2kT/m}$.

9. Als sehr vereinfachtes Modell des transversalen Stromflusses und Feldumkehr betrachtet man eine Scheibe mit



$$\vec{B} = (B_x(z), B_{y0}, B_{z0})$$

Druck und Dichte sollen nur von z abhängen. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p\right) = 0$$

mit Randbedingungen

$$p \to 0, \; B_x \to B_{x0}$$

für $|z| \to \infty$, und aus

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$j_y = \frac{1}{\mu_0}\frac{dB_x}{dz}, \qquad j_x = j_z = 0$$

Zeigen Sie, dass eine Lösung , die diese Randbedingungen erfüllt und ein Feldumkehr in der Ebene z=0 hat, durch

$$B_x(z) = B_{x0}\tanh(z/h)$$

$$p(z) = \frac{B_{x0}^2}{2\mu_0}\mathrm{sech}^2(z/h)$$

$$j_y(z) = \frac{B_{x0}}{\mu_0 h}\mathrm{sech}^2(z/h)$$

gegeben ist. Die Grössen B_{x0}, B_{y0}, B_{z0} und h hängen von der Dichte, Temperatur, usw. ab. Zeigen Sie auch, dass

$$B_x^2(z) + 2\mu_0 p(z) = B_{x0}^2$$

10. In der Zweiflüssigkeitstheorie gilt für jede Teilchensorte k (k=e,i) die Kontuitätsgleichung

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_k \vec{u_k})$$

und die Bewegungsgleichung

$$m_k n_k \frac{d\vec{u_k}}{dt} = n_k q_k [\vec{E} + \vec{u_k} \times \vec{B}] - \nabla p_k + \vec{R_{kj}}$$

Es gilt weiter:

$$\rho_{el} = n_i q_i + n_e q_e \approx 0$$

$$\vec{j} = n_i q_i \vec{u_i} + n_e q_e \vec{u_e} = e n_e (\vec{u_i} - \vec{u_e})$$

$$\vec{R}_{ei} = -\vec{R}_{ie} = \eta e n_e \vec{j}$$

$$\rho_M = n_i M_i + n_e m_e$$

$$\rho_M \vec{v} = n_i M_i \vec{u_i} + n_e m_e \vec{u_e}$$

Zeigen Sie, dass die elektrische Ladungs- und Stromdichten die Kontinuitätsgleichung erfüllen und dass

$$\vec{u_e} \approx \vec{v} - \frac{\vec{j}}{e n_e}$$

$$\vec{v} \approx \vec{u_i} - \frac{m_e}{M_i} \frac{\vec{j}}{e n_e}$$

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_M \vec{v})$$

Hier sollen Sie Terme in m_e/M_i, die eindeutig klein sind, weglassen. Unter der Voraussetzung, dass der Gesamtdruck p die Summe der partiellen Drucken p_i und p_e ist, und dass die konvektiven Termen richtig kombinieren, zeigen Sie, dass die Summe der Gleichungen für Elektronen und Ionen zu

$$\rho_M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p$$

führt. Wenn Sie die Trägheit der Elektronen vernachlässigen, erhalten Sie aus der Bewegungsgleichung für die Elektronen

$$\vec{E} + \vec{u_e} \times \vec{B} = \eta \vec{j} - \frac{\nabla p_e}{e n_e}$$

Setzen Sie den obigen Ausdruck für $\vec{u_e}$ ein, um das Ohm'sche Gesetz zu erhalten.

4 Kernfusion

4.1 Einführung

Seit über drei Jahrzehnten werden Forschungsarbeiten zur kontrollierten Kernfusion mit dem Ziel durchgeführt, Energie durch die Verschmelzung leichter Atomkerne frei zusetzen. Die Vorteile, falls dies gelingen sollte, sind offensichtlich, unbegrenzte, billiger Brennstoff und verhältnismässig sauber. Ob es irgendwann zum wirschaftlichen Nutzen kommt, bleibt trotzdem offen. Dabei konzentrieren sich die Arbeiten auf

- Trägheitseischluss
- Magnetischen Eischluss
- Myon-Katalysierte Kernfusion
- Reagenzglas (nicht mehr!)

Bevor ich zu den plasmaphysikalischen Aspekten komme, muß man einige Grundbegriffe aus der Kernphysik kurz erläutern:

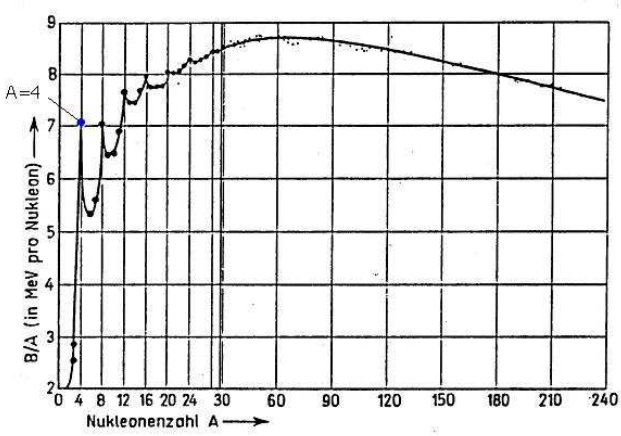


Figure 45: Die Bindungsenergie pro Nukleon der Atomkerne in Abhängigkeit von der Massenzahl

Bemerkenswert in Abb. 45 ist die Spitze bei A=4: ^4He ist stark gebunden
Die Kurve steigt bis A≈ 50-60: in dem Bereich kann man Energie aus der Kernverschmelzung gewinnen.
Besonders nützliche Reaktionen für die Kernfusion auf der Erde (in der Sonne verläuft sie anders) sind:

$$^2D + {}^3T \rightarrow {}^4He\,(3,5\,MeV) + n\,(14,1\,MeV)$$

$$^2D + {}^2D \rightarrow \begin{cases} {}^3He\,(0,8\,MeV) + n\,(2,4\,MeV) \\ {}^3T\,(1,0\,MeV) + p\,(3,0\,MeV) \end{cases}$$

Auch möglich ist

$$^2D + {}^3He \rightarrow {}^4He\,(3,6\,MeV) + p\,(14,7\,MeV)$$

Wie wir im kurzem sehen werden, hat die D-T Reaktion die niedrigste "'Ignition Temperature"' (Zündtemperatur). ^2D ist leicht zu bekommen. ^3T muss gebrütet werden. Endprodukt: α -Teilchen bleiben im Plasma und heizen es (ein α -Teilchen ist ein ^4He Ion). Die 14-MeV Neutronen verursachen technische Probleme: sie aktivieren alles und verursachen Strahlungsschäden. Zum bruten von ^3T werden die Reaktionen
$n +^6 Li \rightarrow^3 T +^4 He$ und $n +^7 Li \rightarrow^3 T +^4 He + n$ genutzt.
Damit zwei Teilchen fusionieren können, muss die abstoßende Coulombkraft überwunden werden (Durchdringund der Coulomb-Barriere). Die Tunnelwahrscheinlichkeit als Funktion der relativen kinetischen Energie W ist

$$\begin{aligned}\sigma(W) =& \frac{const}{W} \exp\left[-\frac{\sqrt{8m}Z_1Z_2e^2}{h\sqrt{W}}\right] \\ =& \frac{S}{W} \exp\left[-\frac{G}{\sqrt{W}}\right]\end{aligned}$$

m= reduzierte Masse der Teilchen
(S+G können empirisch gefittet werden aber $G \propto Z_1Z_2\sqrt{m}$)
Für eine Maxwellische Geschwindigkeitsverteilung gilt

$$\frac{dn}{dW} = const\sqrt{\frac{W}{T^3}}e^{-W/k_BT}$$

(k_BT)=Temperatur in Energieeinheiten.

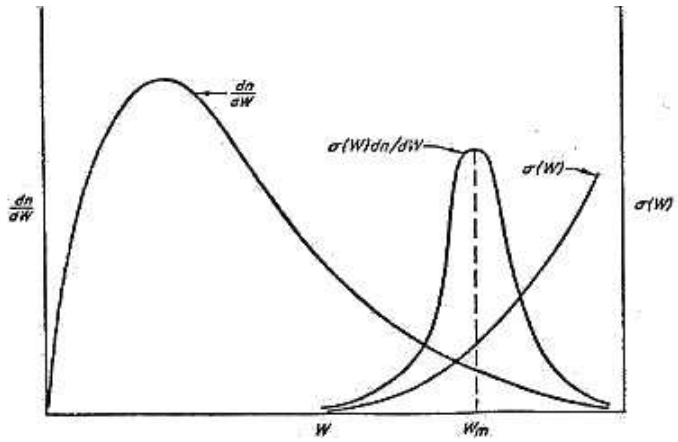


Figure 46: Effect of Maxwellian energy distribution on nuclear reaction rate

Abb. 47 zeigt die Wirkungsquerschnitte $\sigma(W)$ für die wichtigste (D-T, D-D (total) und D-^3He) Reaktionen.
Die Reaktionsrate ist
$R = n_1n_2 \langle\sigma v\rangle$
(σv muß über die Geschwindigkeitverteilung gemittelt werden)
Die Freigesetzte Leistung ist $\sim R \cdot Q$, wobei Q=Energie/Reaktion.

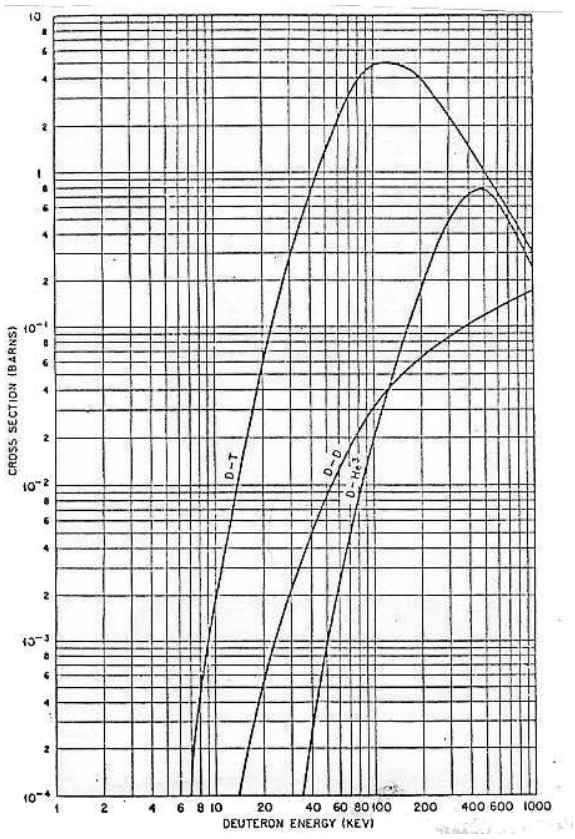


Figure 47: Cross sections for D-T, D-D (total), and D-He^3 reactions.

Damit findet man

$$P_{DD} = 5,6 \cdot 10^{-13} n_D^2 \langle \sigma v \rangle \frac{W}{m^3}$$
$$P_{DT} = 2,8 \cdot 10^{-12} n_D n_T \langle \sigma v \rangle \frac{W}{m^3}$$

mit $\langle \sigma v \rangle$ aus den Kurven von 48. (17,6 MeV=$2,8 \times 10^{-12} J$)
Die Leistungsdichte, die im Plasma bleibt, ist der Ionenanteil. Für D-T$\rightarrow \alpha + n + 17,6\,\mathrm{MeV}$ ist dies ca.20% vom ganzen.
Die Fusions-Brennstoffe und Reaktionsprodukte sind keine langlebige radioaktive Isotope.
Die 14 MeV Neutronen bereiten trotzdem technische Probleme. Die Leistungsdichte an den Wänden darf nicht zu groß sein, damit die thermomechanische Belastung nicht zu groß wird.
Typische Werte, die man für einen Fusionsreaktor erwartet, sind
1-10 $\mathrm{MW/m^2}$ = 1-10 $\mathrm{kW/cm^2}$ (am Plasmarand).
Ein wichtiger Parameter bei magnetischem Einschluß ist $\beta = \frac{\langle p \rangle}{(B_0^2/2\mu_0)}$, das Verhältnis mittlere Druck zum äusseren Magnetfeld-Druck. Um Instabilitäten zu vermeiden, darf β nicht zu gross werden ($\beta \lesssim$ 5-10% typisch). (Mehr später)
Der Druck p ist $= \sum n_\alpha k_B T_\alpha$ für alle Teilchensorten.

$$p \simeq k_B(n_i T_i + n_e T_e)$$

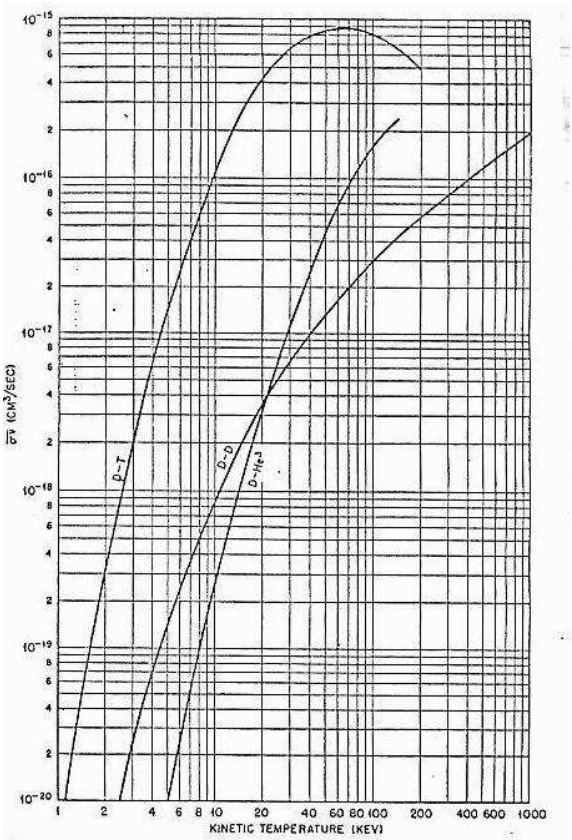


Figure 48: Values of $\langle \sigma v \rangle$ based on a Maxwellian distribution for D-T, D-D (total), and D-He^3 reactions.

Bei magnetischem Einschluß führt dies zu

$$n_e \simeq n_D + n_T \lesssim 10^{21} m^{-3}$$

Bei einer Temperatur von 10 keV ist der Druck dann ca. 30 atm ($30 \times 10^5 N/m^2$) und $P_{DT} \simeq 56\, MW/m^3$ und Energiedichte $\simeq 3p/2 \simeq 4,5 MJ/m^3 \quad (1kWh \simeq 3,6MJ)$.
Bei einem Plasmavolumen von 1000 m^3 ist die eingeschlossene Energie $\simeq 4,5 \cdot 10^9 J$.
Die Plasmamasse $\sim 2,5 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}\, kg \times 10^{21}\, m^{-3} \times 10^3\, m \simeq 4,2\, g$.
Die Energie, die man braucht, um 200 Liter Wasser zu verdampfen, ist $4,5 \cdot 10^8$ Joule.
$4,5 \cdot 10^9$J verdampfen 2000 Liter Wasser. Eine Explosion ist nicht sehr wahrscheinlich.

$$539 \frac{cal}{g} \cdot 4,2 \frac{J}{cal} \cdot 1000 \frac{g}{Liter} \Rightarrow 2,25 \cdot 10^6 \frac{Joule}{Liter}$$

Kriterion für die Zündung: Zur Vereinfachung, nehmen wir an, dass Dichte und Temperatur homogen sind. Die Verluste wegen Diffusion, Wärmeleitung usw. sind dann klein (sie sind $\propto$ Gradienten der Dichte oder Temperatur).
Dann verliert das Plasma Energie vorwiegend durch Bremsstrahlung (bei Elektronen-Ionen-Stößen) und in einem nicht voll ionisierten Plasma auch durch atomaren Übergänge.

Man kann zeigen, dass

$$P_{Brems} \simeq \frac{16}{3}\frac{\alpha^3\hbar^2}{m_e}\left(\frac{2\pi k_B T_e}{3m_e}\right)^{1/2} n_e \sum n_i Z_i^2 g_{FF}$$

g_{FF} ist der Gaunt Faktor ≈ 1. Mit Dichten in m^{-3} und $k_B T_e$ in eV findet man

$$P_{Brems} \simeq 1.6 \cdot 10^{-38} n_e (k_B T_e)^{1/2} \sum n_i Z_i^2 \frac{W}{m^3}$$

Im idealen Fall werden die Bremsstrahlung-Verluste gerade Kompensiert.
Abb. 49 zeigt die Leistungsdichte, P_{Brems} und den Druck als Funktion der Temperatur für $n_e = n_i \simeq 10^{21} m^{-3}$. Die Bremsstrahlung wird durch Fusionsleistung kompensiert, für D-T

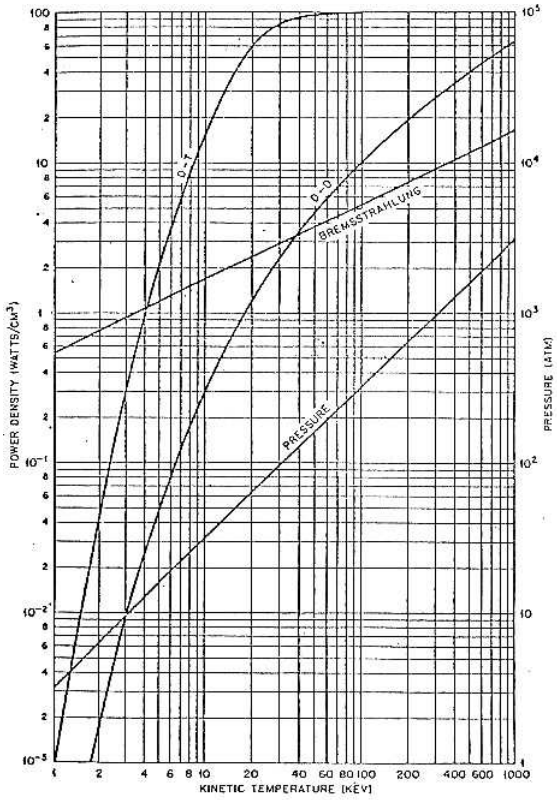


Figure 49: Characteristics of thermonuclear reaction and the ideal ignition temperature

bei einer Temperatur von 4,4 keV und für D-D bei 48 keV (Zündtemperatur). Um sonstigen Verlusten auszugelichen, werden die Zündtemperaturen noch höher. Man kann davon ausgehen, dass Temperaturen zwischen 10 keV und 30keV benötigt werden (in der Sonne "'brennt"' das Plasma schon bei 1,3 keV $\hat{=}$15 Mio K.

Lawson Kriterium für Plasma Einschluß:

Welche Kriterien befriedigt werden müssen, damit eine "'interessante"' Leistung raus kommt, hängt davon ab, wie "'interessant"' definiert wird.
Energie Fluss (s. Fig. 50):

$$E_{Therm} = E_{Fluss} = E_{Neutron} + E_\alpha$$

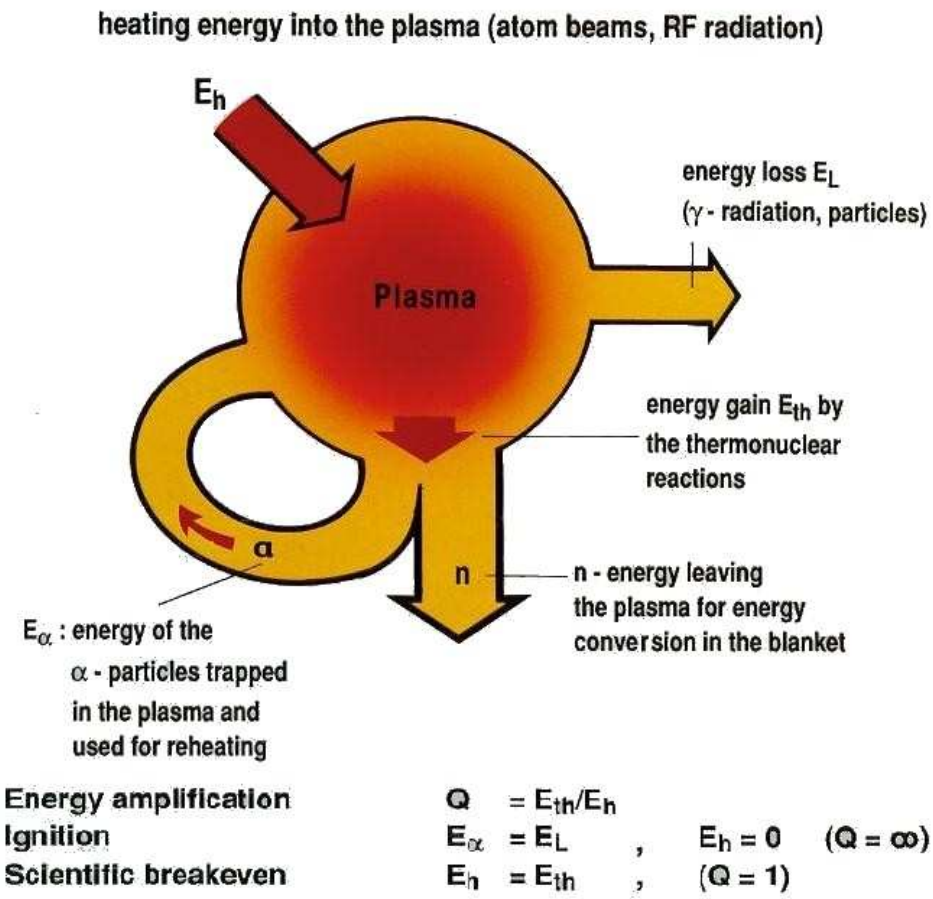


Figure 50: Energy flow diagram for a thermonuclear plasma

$$
\begin{aligned}
E_{Heiz} + E_\alpha &= \text{Energie EIN} \\
E_{Loss} + E_{Neutron} &= \text{Energie AUS} \\
\text{Zündung} &\rightarrow E_{alpha} = E_{Loss}
\end{aligned}
$$

Die Energie Verstärkung ist $Q = E_{Fus}/E_{Heiz}$.
Breakeven: Q=1; Für einen Reaktor ist $Q \gg 1$ erforderlich.
Wir betrachten die Zeitliche Veränderung der Plasma Energiedichte W_{pl}

$$
\begin{aligned}
W_{pl} &= \frac{3}{2} \sum n_j (k_B T_j) \\
&\simeq \frac{3}{2} (n_e + n_D + n_T)(k_B T)
\end{aligned}
$$

und parameterisieren die Verluste durch Diffusion, Wärmeleitung usw. als $-W_{pl}/\tau_E$. Dann gilt:

$$
\frac{dW_{pl}}{dt} = P_{Fus} - P_{Brems} + P_{Heiz} - \frac{W_{pl}}{\tau_E}
$$

τ_E heißt Energie-Einschlußzeit.

P_{Fus} soll eigentlich durch P_α ersetzt werden

$$P_{Fus} = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle (17,6 MeV)$$
$$P_\alpha = P_{Fus}(3,5/17,6) \simeq 0.2 P_{Fus}$$

Energie wird extrahiert, falls $dW_{pl}/dt \geqslant 0$
Eine sehr grobe Abschätzung erhält man indem man sonstige Verluste nicht berücksichtigt. Dann kann man sagen, dass zumindest gelten:

$$P_{Fus} > P_{Brems} + \frac{W_{Plasma}}{\tau_E}$$

um einen Reaktor betreiben zu können. Eigentlich müsste man P_{Fus} durch P_α ersetzen.

$$n_D n_T \langle \sigma v \rangle \underbrace{E_{Fus}}_{E_\alpha} > P_{Brems} + \frac{3}{2} k_B T \frac{(n_e + n_D + n_T)}{\tau_E}$$

nun ist $n_e = n_D + n_T$ und für $n_D = n_T$ gilt

$$n_D^2 \langle \sigma v \rangle E_\alpha - P_{Brems} > \frac{3}{2} k_B T \frac{(4 n_D)}{\tau_E}$$

mit $P_{Brems} \simeq 1,6 \cdot 10^{-38} n_e (2 n_D) T^{1/2} Z_{eff}^2$ $(Q \geqslant 1)$. Umformen ergibt

$$n_D \tau_E \gtrsim \frac{6 k_B T}{\langle \sigma v \rangle E_\alpha - 4 c_1 Z_{eff}^2 \sqrt{k_B T}}$$

mit $c_1 \simeq 5,4 \cdot 10^{-37}\, W m^3/keV^{1/2}$ und $Z_{eff}^2 = \sum \frac{n_Z Z^2}{n}$. Auch ist $E_\alpha \simeq 3,5\,\mathrm{MeV}$ und $n_D \simeq n/2$.
Diese ist eine etwas komplizierte Funktion von T, die ein Minimum $n\tau_E \simeq 3 \cdot 10^{19} m^{-3} s$ bei $T \simeq 28\,\mathrm{keV}$ hat.
Berücksichtigt man die Tatsache, dass im interessanten Bereich $10\,keV < k_B T_i < 30\,keV$, $\langle \sigma v \rangle \propto T_i^2$ sieht man, dass Q dominierend vom "'Tripelprodukt"' $n_D \tau_E (k_B T_i)$ abhängt.

$$n_D \tau_E (k_B T) = \frac{12 (k_B T)^2}{\langle \sigma v \rangle E_\alpha - 4 c_1 Z_{eff}^2 \sqrt{k_B T}}$$

Dies hat ein flaches Minimum bei einem Ionentemperatur von ca. 10 keV
(Wert $35 \cdot 10^{20}$ kev s/m^3). Für ein Reaktor soll dies um mindestens einen Faktor 2-3 grösser sein.
Dies liefert zumindest eine Abschätzung für die minimale Dichte, Einschlusszeiten usw.

$$n_D \tau_E (k_B T_i) \gtrsim (7-9) \cdot 10^{21} \frac{keV s}{m^3}$$

Wie kann man die Bedingungen für die Kernfusion erreichen?

a) Sonne (Einschluß über die Gravitationskraft. Eine Sonnenmasse wird benötigt.) Hier sind $\tau_E \sim 10^{10}$ Jahre, und $k_B T \simeq 1{,}3\,\mathrm{keV} \quad (15 \cdot 10^6\,\mathrm{K})$. Die relevante Reaktionen sind:

$$\begin{aligned} p + p &\rightarrow d + e^+ + \nu_e \\ p + d &\rightarrow He^3 + \gamma \\ He^3 + He^3 &\rightarrow He^4 + p + p \\ He^3 + He^4 &\rightarrow Be^7 + \gamma \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Hier wird nicht mehr dazu gesagt.
b) Heisses Plasma im Labor
Wie werden die Zündbedingung erreicht mit $P_{Fus} > P_{in}$?
Hierfür braucht man $n\tau \sim\ 5 \cdot 10^{20}\, m^{-3} s, \quad k_B T \sim 15 - 20\,\mathrm{keV}$.
Wie schliesst man ein Plasma mit $T \sim 15$ keV $(16 \cdot 10^6\,\mathrm{K})$ im Labor ein?
Es gibt zwei Möglichkeiten: entweder mit dem Magneteinschluss oder mit dem Trägheitseinschluss.

1. **Magnetische Fusion**
   Typische Werte für den magnetischen Einschluß sind:

$$n_D \sim n_T \sim \frac{n_e}{2} \simeq 10^{20} m^{-3}$$

$$T_i \simeq T_e \simeq 15 - 20\, keV, \quad \tau \gtrsim \text{einige Sekunden (bis Dauerstrich)}$$

   Es gibt

   - Maschinen mit geschlossenen Feldlinien z.B. Tokamak, Stellarator
   - Maschinen mit offenen Enden z.B. Spiegel

2. **Trägheitsfusion**
   Typische Werte für den Trägheitseinluß sind:

$$\frac{r}{v_{th}} > \frac{1}{n_2 \langle \sigma v \rangle} \quad \Rightarrow \rho r \gtrsim 3 \frac{g}{cm^2}$$

$$n \sim 4 \cdot 10^{31} m^{-3}, \quad \tau \sim 10^{-10} s$$

   (Ein Pellet wird mit einem Laser oder einem Ionenstrahl komprimiert, danach wird ein kleiner "'heißer Fleck"' angezündet. Dies führt dazu, das der Rest verbrennt.

   - Laser getriebene Maschinen Für den Laser braucht man:

$$\omega > \omega_P = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}} \quad \Rightarrow \text{UV am besten}$$

   - Leichtionen getriebene Maschine
   - Schwerionen getriebene Maschine

Für beide Einschlussarten ist der Energeifluss gegeben durch:

$$E_{Fus} = \underbrace{E_0}_{\text{neutral}} + \underbrace{E_+}_{\text{geladen}(\alpha)}$$

$E_0 \rightarrow$ Blanket (Tritium; Thermische Energie Konversion)
$E_+ \rightarrow$ Plasmaheizung; Strahlung $\rightarrow$ Wand
Die α- Teilchen bleiben im Plasma und heizen es auf, aber verursachen auch Verunreinigungen, die weggepumpt werden müssen.
Zündung ($Q > 1$) reicht nicht aus für die Energieproduktion.
Dieser Zustand muss auch über längeren Zeiträumen aufrechterhalten bleiben.
Damit sind verbunden:
Entfernen von Helium "'Asche"' und die Wechselwirkung zwischen Randplasma und Gefässwänden. Die Forschung konzentriert sich zunehmend auf diesem Aspekt.
Aber wir dürfen nicht vergessen:
Kein eingeschlossenes Plasma ist wirklich im thermodynamischem Gleichgewicht.
Instabilitäten, verursacht durch den Druckgradienten und/oder durch Plasmaströme, sind ein großes Problem.

Vorteile der Kernfusion

- Fast unerschöpfliche Quelle von billigem Brennstoff.
  Das Deuterium in einem Schwimmbecken der Grösse $30 \times 30 \times 2m$ könnte Strom für Karlsruhe für ein Jahr produzieren.
- Ein unkontrollierter Leistungsanstieg (Explosion) ist nicht möglich, weil die Reaktion kontinuierliche Nachfüllung des Brennstoffs braucht und im Störfall bricht die Fusionsreaktion ab.
- Keine chemischen Abfälle entstehen
- Die Radioaktiven Abfälle sind viel kurzlebiger und daher weniger gefährlicher als bei der Kernspaltung.

Nachteile der Kernfusion

- Es gibt radioaktive Abfälle (Aktivierung des Strukturmaterials)
- die Anlagen sind sehr groß und kompliziert (teuer)

Der Plasma Einschluß und Heizung ist nur ein Teil der Problematik. Dazu muss man sich auch mit der Thermischen-, Mechanischen- und Strahlungsbelastung auf Brutmantel und ersten Wand auseinander setzen. Auch mit den Sicherheitsaspekten muss man sich beschäftigen, die für den Tritium Kreislauf (ca. 2-3 kg Tritium in Reaktor) notwendig sind. Radioaktive Abfälle (Neutronen aktivieren Strukturmaterial) sind auch einer der zu beachtende Sicherheitsaspekte. Diese sind viel weniger als bei Spaltreaktoren, trotzdem muss die Sicherheit eingehalten werden.
Und zum Schluss stellt sich noch die Frage: Kann man die Kernfusion wirtschaftlich gestalten?
Konzentriert man sich als erstes auf den Aspekt Plasma Einschluß und Heizung. Man hat in den letzten Jahren grosse Fortschritte gemacht und ist nahe Q=1 (s. Abb. 51).
Wie schliesst man ein Plasma mit $T \sim 15\,keV$ $(16 \cdot 10^6\,K)$ im Labor ein?
Wie vorher erwäht, gibt es zwei Möglichkeiten: entweder mit dem Magneteinschluss oder mit dem Trägheitseinschluss. Hier wird nur noch der Einschluss mit Magnetfeldern behandelt.

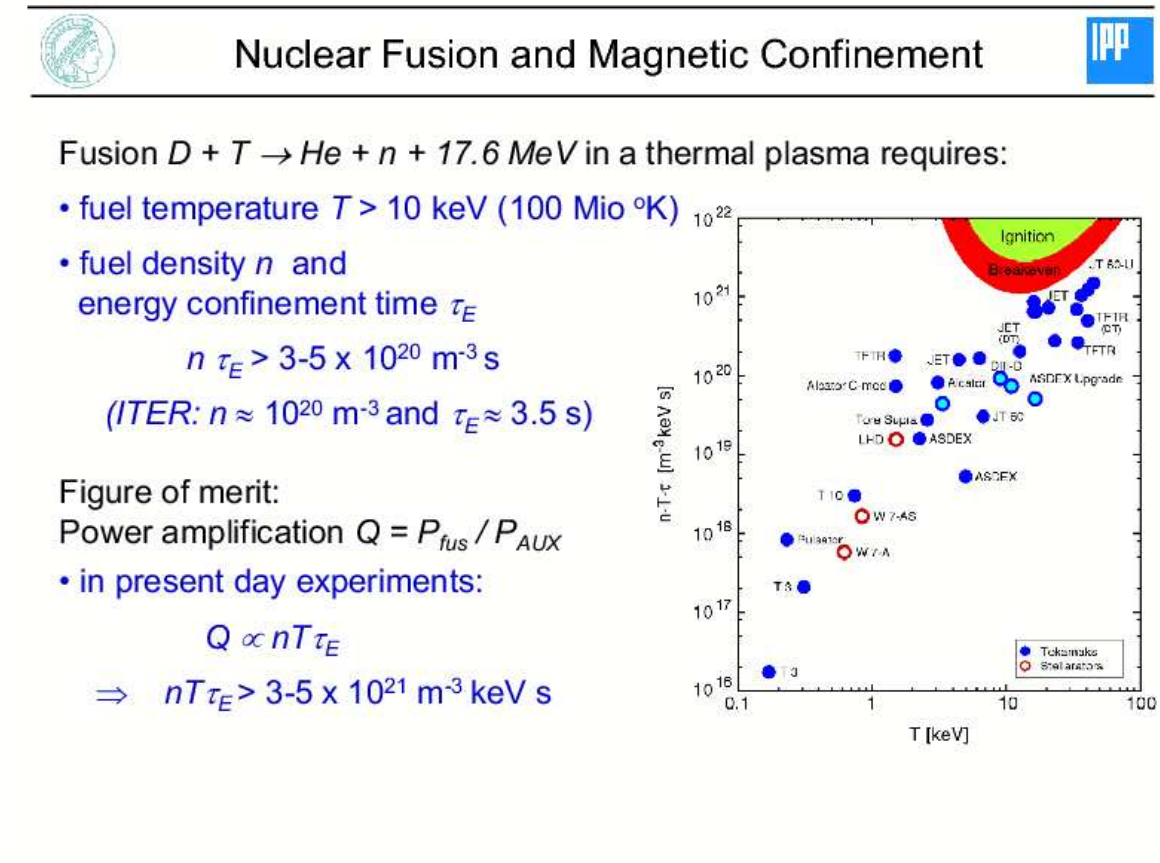


Figure 51: Triple fusion produkt as a function of ion temperature T for a mumber of tokamaks.

4.2 Grundlagen des Magneteinschlusses

Wieso ist der magnetische Einschluß gut? Wie auch erwähnt, machen geladene Teilchen Spiralbahnen um die Magnetfeldlinien. Somit kann das Plasma von der Umgebung bei geeigneter Anordnung der Feldlinien ausreichend isoliert werden.
Typische Werte für den magnetischen Einschluß sind:

$$n_D \simeq n_T \simeq \frac{n_e}{2} \simeq 10^{20} m^{-3}$$

$$\text{man möchte: } T_i \simeq T_e \simeq 20\,keV, \quad \tau \gtrsim \text{einige Sekunden (bis Dauerstrich)}$$

Transport (von Teilchen und Wärme) ist noch ein Problem (vor allem weil es turbulent ist). Um ein brennendes Fusionsplasma aufrecht zuerhalten muss man noch besser verstehen und steuern können: wie Diffusion von Teilchen Wärme transport, Turbulenzen und Instabilitäten.
Verunreinigungen beeinträchtigen die Energiebilanz auf 2 Weisen:

1. Brennstoff wird verdünnt
   $n_e = n_D + n_T + 2n_{He} + \sum_{Z>2} Zn_Z \qquad (n_D \neq n_T \neq n_e/2)$
   Die Grenzen, innerhalb deren die Zündung eines D-T Plasmas möglich ist, sind sehr eng gezogen. Selbst die α-Teilchendichte darf nicht höher als etwa 10% der Wasserstoffionendichte werden.

2. P_{Brems} wird stark erhöht, da Z_{eff}^2 erhöht wird.

Man unterscheidet beim magnetischen Einschluss zwischen:

- Maschinen mit geschlossenen Feldlinien (Torus, z.B. Tokamak, Stellarator)
- Maschinen mit offenen Enden (z.B. Spiegel)

Zuerst eine Erinnerung an dem Torus und warum ein einfacher Torus nicht geht.
Abb. 52 zeigt die Geometrie und definiert die Koordinaten. Wenn das Magnetfeld durch

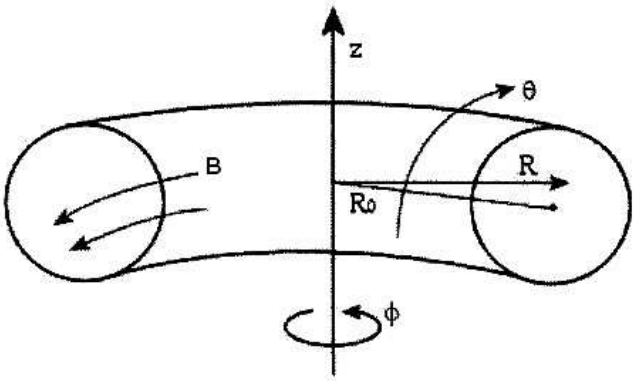


Figure 52: Geometrie in einem Torus

poloidalen Spulen (in die θ-Richtung) erzeugt wird, gilt

$$\vec{B} = (B_r, B_\phi, B_z) = (0, \frac{R_0 B_\phi(R_0)}{R}, 0)$$
$$\nabla \left|\vec{B}\right| = -\hat{R} B_\phi(R_0) \frac{R_0}{R^2}$$

Die Driftgeschwindigkeit ($r_L = v_\perp m / |q| B$) ist dann

$$\vec{v}_D = \pm \frac{v_\perp r_L}{2} \underbrace{\frac{\vec{B} \times \nabla \left|\vec{B}\right|}{B^2}}_{\frac{\hat{z} B_\phi(R_0) R_0}{B(R) R^2}} + \frac{m v_\parallel^2}{q B^2} \underbrace{\frac{\vec{R} \times \vec{B}}{R^2}}_{\frac{\hat{z} B_\phi(R_0) R_0}{R^2}}$$
$$= \frac{m}{q B_\phi(R_0) R_0} (v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2}) \hat{z}$$

Entgegengesetzt für Elektronen und Ionen (s. Abb. 53).
Ionen driften nach Oben und Elektronen driften nach Unten. Daraus folgt eine Ladungstrennung, was ein elektrisches Feld verursacht, und daraus ein $\vec{E} \times \vec{B}$ – Drift. Dies ist radial nach Aussen, mit $|v_D| \sim \frac{k_B T}{eBR}$.
Das Plasma geht schnell verloren.
Ein Zahlenbeispiel mit $R = 1m, \quad B = 4T, \quad kT = 100eV$ ergibt $v_D \sim 25\, m/s$.

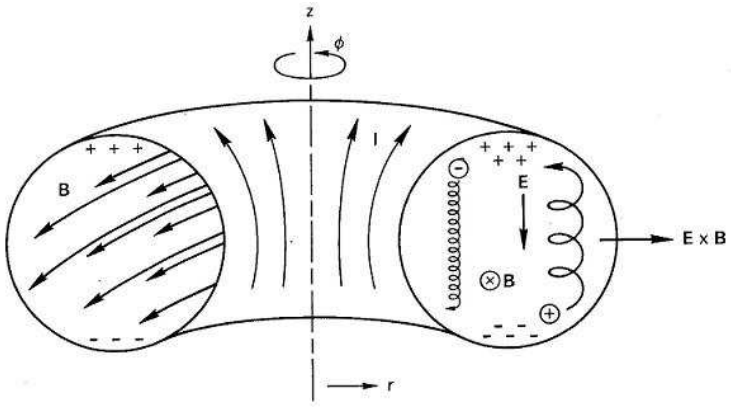


Figure 53: Teilchenbewegung in einem Torus

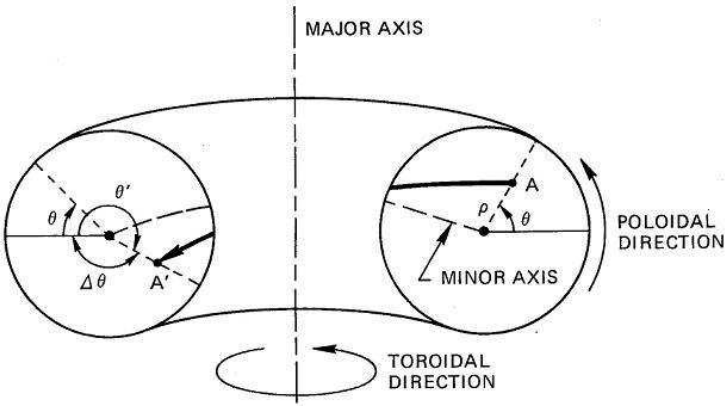


Figure 54: In a torus with rotational transform, a line of force A-A' changes its azimuthal angle θ around the minor axis as it winds around the major axis.

Eine andere Interpretation: Ein zusätzlicher Druck schiebt das Plasma gegen die äusseren Wand. $B^2/(2\mu_0) =$ magnetischer Druck. $\nabla[B^2/(2\mu_0)] \propto \nabla\,|B|)$ ist äquivalent zu einer nach aussen gerichteten Druck-Gradient Kraft, die nicht in einem einfachen Torus kompensiert wird. Eine kompliziertere Magnetfeld wird benötigt. Man muß die Feldlinien so verformen, daß die oberen und untern Hälften des Torus verbunden sind. Die Feldlinien werden verschraubt, wie in Abb. 54.
Es gibt 2 Möglichkeiten, ein Plasma in einem Torus einzuschließen:

- Tokamak (Abb. 55)

- Stellarator (Abb. 56)

Tokamak
Beim Tokamak sind es zwei sich überlagernde Magnetfelder, die das Plasma einschliessen:
Toroidales Feld (Quelle J_θ), das durch äussere Spulen erzeugt wird.
Poloidales Feld (Quelle J_ϕ), dessen Feldlinien sich Kreisförmig um einem im Plasma erzeugten Strom schliessen. Meistens wird der Plasmastrom induziert durch einen Transformatorspule auf der Achse des Torus.

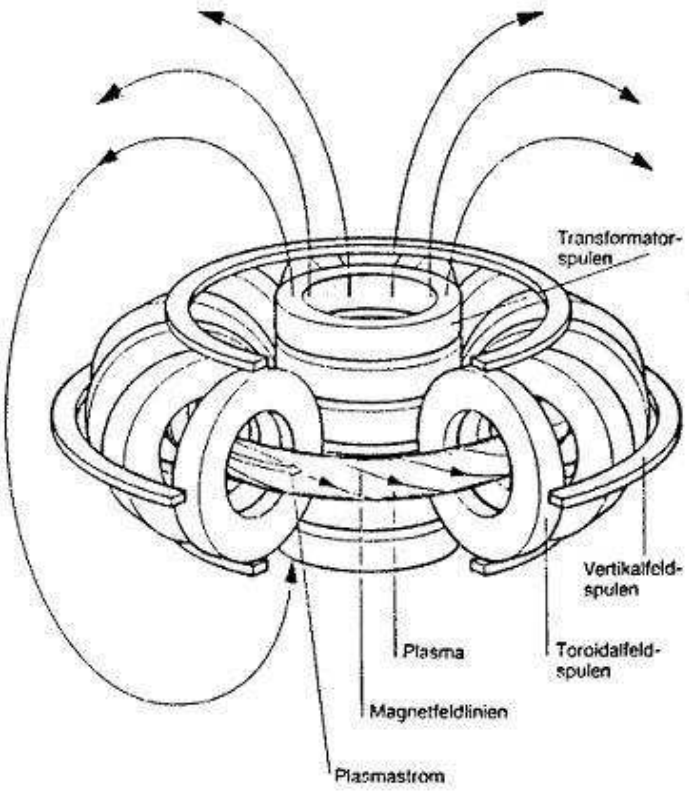


Figure 55: Schemaskizze eines Tokamaks zeigt die Transformatoren-, Toroidal-, und Vertikalfeldspulen sowie den Plasmastrom, die zusammen das Magnetfeldsystem eines Tokamaks erzeugen.

In dem gesamten System laufen die Feldlinien und die an sie gebundenen Teilchen schraubenförmig um die "Seele" des Torus (die zentrale Magnetfeldlinie). Die Teilchen erfahren immer noch einen Drift z.B. nach unten. Solange sich die Feldlinien in der oberen Hälfte des Torus befinden, bedeutet dies einen Drift nach unten, sowie auch einen Drift auf das Zentrum zu; für Feldlinien in der unteren Hälfte geht der Drift von der Seele weg. Nach einem Umlauf hat sich der Abstand zur Seele nicht geändert (ausser aufgrund von Stössen). In Abb. 54 ist die Struktur des Magnetfelds eines Tokamaks dargestellt. Folgt man von einem beliebigen Punkt startend einer Magnetfeldlinie in toroidaler Richtung (Punkt A), so gelangt man wegen der Verschraubung der Feldlinien nach einem halben Umlauf zum Punkt A'. Der Wert der Polarkoordinate θ des Punktes A in dem gezeichneten Plasmaquerschnitt hat sich nach einem halben toroidalen Umlauf auf den Wert θ' vergrössert. Dementsprechend wäre der Durchstosspunkt der Feldlinie nach einem ganzen Umlauf um die Symmetrieachse beim Werte $2(\theta' - \theta) + \theta$ der Polarkoordinate θ zu finden. Man kann sich vorstellen, dass die Gesamtheit der Durchstosspunkte einer magnetischer Feldlinie nach sehr vielen Umläufen einen Kreis in der Schnittebene erzeugt. Der Radius des Kreises ist gleich dem Abstand O-A in Abb. 54. Die ringförmige Oberfläche des Zylinders, welche von der bei A startende Feldlinie nach vielen toroidalen Umläufen aufgespannt wird, nennt man eine magnetische Oberfläche. Mit diesem Begriff lässt sich die gesamte Struktur des Magnetfeldes in einem Tokamak beschreiben. Sie besteht aus ineinandergeschachtelten,

ringförmigen magnetischen Oberflächen ("nested surfaces") wie in Abb. 57. Entsprechendes gilt für einen Stellarator. Bei ihm sind die magnetischen Oberflächen jedoch nicht axialsymmetrisch, und der Querschnitt ist, je nach Leiteranordnung, verschieden.
Ausser dem Toroidalfeld und dem poloidalen Feld des Stroms benötigt der Tokamak noch ein Vertikales Feld, das die Lage des Stroms im Plasma fixiert, um das Plasma stabil einzuschließen. Dieses Feld wird von zusätzlichen kreisförmigen Spulen (Poloidalfeldspule) erzeugt, die in Ebenen parallel zum Plasmaring liegen (sie Fig. 55).
Der Strom im Tokamak ist notwendig, um ein gut einschliessendes Magnetfeld zu erzeugen. Zusätzlich heizt es das Plasma

$$P_\Omega = \eta J^2$$

Nun ist $\eta \propto T_e^{-3/2}$ und die Ohm'sche Heizung wird für Temperaturen $\gtrsim 1keV$ nicht sehr wirksam. Eine Zusatzheizung ist erforderlich (mehr später).
Der im Plasma fließende Ringstrom hat 2 Nachteile:
Es lässt sich nicht zuverlässig verhindern, dass der Plasmastrom im Tokamak unvorhergesehen abreißt (Plasmaabriss, oder Disruption, auch Stromabbruchinstabilität). Dabei zerfällt das Magnetfeld des Plasmastroms (typisch in ca. 10 ms). Die ganze Plasmaenergie wird auf die Wände deponiert. Das mit dem Zerfall des Magnetfeldes induzierte elektrische Feld wirft in allen metallischen Strukturen, die das Plasma umgeben, Wirbelströme an. Dies wiederum führt zu unerwünschten Spannungen und mechanischen Deformationen im Strukturmaterial. Weil der physikalische Mechanismus des Plasmaabrisses noch nicht verstanden ist, bleibt zunächst offen, ob er wirklich jemals zuverlässig unterdrückt werden kann.
Weil der Plasmastrom im Tokamak ständig fliessen muss, ist eine ständige Leistungszufuhr zum Stromtreiben notwendig, um Ohm'sche Verluste (auch wenn diese nicht sehr groß sind) zu kompensieren.
Wenn der Plasmastrom über einen Transformator induziert wird, ist die Brennphase eines Tokamak zeitlich begrenzt, weil der Transformator "entladen" werden und der Strom vom neuen hochgefahren werden muss.
So ein Pulsbetrieb bringt zusätzlich thermische und mechanische Belastung aller Teile (Ermüdungserscheinungen).
Der Plasmastrom muss nicht induktiv betrieben werden. Es kann auch durch tangentiale Injektion beschleunigter Teilchen oder von Hochfrequenzleistung im Plasmaring getrieben werden. Letzteres werden zu Zeit untersucht (JET, Asdex, Rußland).
z.B.: Lower hybrid current drive:
The wave propagates at a small angle with field line and the wavelength in plasma is small (ca. 2mm). The wave ist nearly longitudinal (hence electrostatic). It is damped by electron Landau damping which results in energy transfer to plasma electrons moving close to the wave phase velocity. Cutoff when $n_e > n_{e,crit} \simeq 2 \cdot 10^{19} m^{-3}$. In JET, current drive with ECRH or ICRH is also possible.
Tabelle 2 zeigt die wichtigste Parameter einiger moderne Tokamaks (JET, Doublet D3D, Jaeri JT-60 und Asdex Upgrade). Einzelheiten dazu werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

	JET	Doublet D3D	JT-60	Asdex U
R (m)	2,96	1,60	3-3,4	1,65
a_1 (m)	1,25	0,56	1,0	0,50
a_2 (m)	2,00	1,41	1,5	0,80
B_{Tor} (T)	3,5	2,2	4,4	<3,9
I_P (MA)	6-7	3	6-7	<1,4
Heizleistung (MW)	45	24	43	30
NBI	22	22	22	20
ICRH+LH	22	2	21	8
ECRH	0	2	2	2
Q_{DT}	1,1	-	1,2	-
Plasmavolumen (m^3)	100	37	40-100	14
Pulslänge (s)	1-5	5-10	1-2	<10

Table 2: Wichtigste Parameter einiger modernen Tokamaks

Stellarator

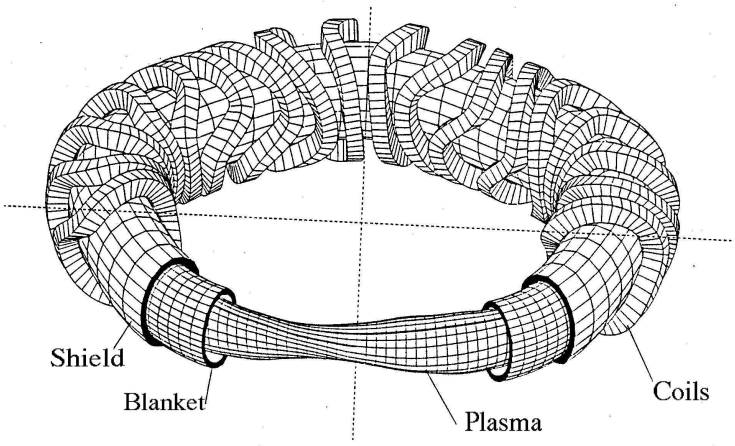


Figure 56: Advanced Stellarator Reactor: Schematic view

In einem Stellarator wird die Verschraubung der Feldlinien in den äußeren Spulen erzeugt. Ein Plasmastrom ist nicht erforderlich und deshalb gibt es keine Disruptions. Das Magnetfeld ist i.A. nicht axial-symmetrisch. Bei geeigneten Wicklungen des Magneten wird die Verschraubung des Magnetfeldes mit den Hauptfeldspulen selbst erzeugt. Die Spulen haben dann eine komplexe, nicht planare Gestalt (Abb. 56).
Die ersten Versuche in Princeton waren nicht sehr erfolgreich (Bohm Diffusion, schlechter Einschluss). Dann wurde die Stelleratorenwicklung fast eingestellt. Erst nach besseren Ergebnissen in Japan und Rußland, sowie in Garching (mit Wendelstein 7-AS) wurde diese Linie weiter entwickelt.

4.2.1 Plasmaflächen, Rotationstransform

Magnetohydrodynamisches Gleichgewicht erfordert

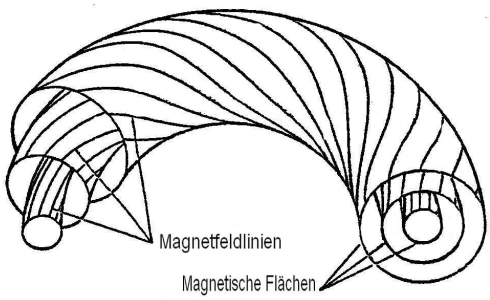


Figure 57: Magnetische Flächen eines Tokamakplasmas mit Feldlinien. Die Feldlinien auf den äußeren Flächen drehen sich öfter um die Seele- die Zentrale Ringlinie- als Feldlinien auf den inneren Flächen: Das Feld hat eine Verscherung.

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B},$$

wobei $\vec{j}$ der induzierte diamagnetische Strom ist. Die Feldlinien verlaufen auf Flächen p=Konst. Diese müssen auf geschlossenen Oberflächen bleiben, wie in Fig. 57.

Rotationstransform

Zuerst betrachten wir einen Zylinder mit der Länge $2\pi R$ und periodischen Randbedingungen.

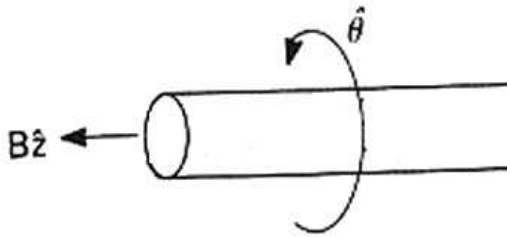


Figure 58: geometry for calculation of rotational transform. (at moment not complete)

Aus Symmetriegründen ist alles unabhängig von θ und z. Dann ist $B_r = 0$ und B_θ, B_z hängen nur von r ab.

Wenn eine Feldlinie eine Drehung um den Torus macht, ist die Änderung in Winkel

$$\Delta\theta = \int_0^{2\pi R} \frac{d\theta}{dz} dz$$

wobei die Gleichungen für die Magnetlinien lauten:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r}{B_z} = 0, \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta(r)}{rB_z(r)}.$$

Dann ist

$$\Delta\theta = \frac{2\pi R B_\theta(r)}{rB_z(r)} = 2\pi\iota(r)$$

(Rotational transform). Wenn ι rational ist, sind die Feldlinien geschlossen, sonst nicht. Man definiert auch den Sicherheitsfaktor

$$q(r) = \frac{1}{\iota(r)} = \frac{2\pi}{\Delta\theta} = \frac{rB_{Tor}(r)}{RB_{Pol}(r)}$$

In einem Torus, $B_z \rightarrow B_\phi = B_{Tor}$ und $B_\theta = B_{Pol}$. Abb. 59 zeigt eine Feldlinie auf eine Fläche mit q = 4.

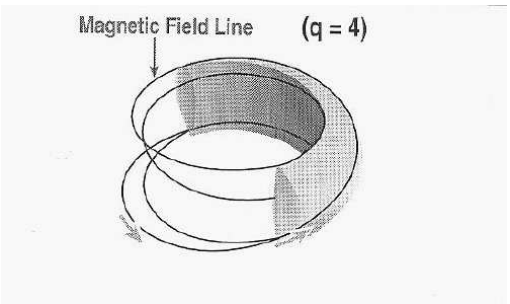


Figure 59: Verlauf einer Magnetfeldlinie auf eine Fläche mit q = 4.

Das Magnetfeld hat eine Verscherung, wenn sich die Feldlinien auf den äusseren Magnetfeldflächen öfter um die Seele drehen als die auf dem inneren. $\left(\frac{dq}{dr} \neq 0\right)$. Die wird definiert als

$$S = \frac{r}{q(r)}\frac{dq}{dr}$$

Im Tokamak wird die Stabilität begünstigt, wenn das Feld eine Verscherung hat.

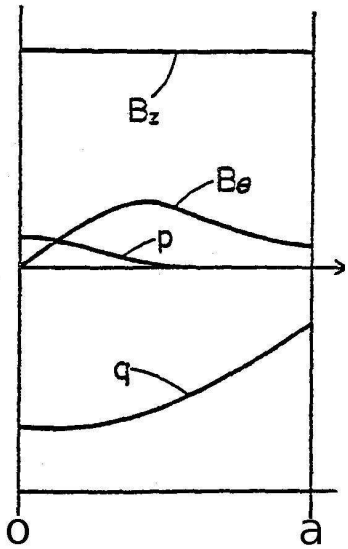


Figure 60: Typische Profile für $B_z = B_{Tor}$, B_{Pol}, Druck p und Sicherheitsfaktor q.

Typische Werten für ältere Tokamaks waren $q(0) < 1$, $q(a) \simeq 3$.

Die MHD Stabilitat erfordert ausserdem $q(a) > 1$ (Kruskal-Shafronov Grenze). Dies bedeutet, dass

$$\frac{\mu_0 I_{max}}{2\pi a} = B_{Pol}(I_{max}) \leq \frac{aB_{Tor}}{R}$$

Neuere Untersuchen zeigen dass die Stabilitat besser ist, wenn $q(a) > 2$ ist.

4.2.2 Typische Tokamak Eigenschaften

Die Existenz von geschlossenen, ineinander geschachtelten Magnetoberflächen, zumindest im Plasmakern eines toroidalen Systems ist notwendig für den Plasmaeinschluss durch ein Magnetfeld. Da $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$, $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, folgt $\nabla p \cdot \vec{B} = 0$, so dass der Druck entlang eine Magnetfeldlinie konstant ist. Da auch $\nabla p \cdot \vec{j} = 0$, fliesst ein Strom auch nur auf Magnetoberflächen.
Man kann nun geschlossenen, ineinander geschachtelten Magnetoberflächen (auf denen der Druck konstant ist) produzieren. Diese werden für ein Tokamak in Abb. 61 gezeigt. In einem Stellarator sind sie komplizierter.

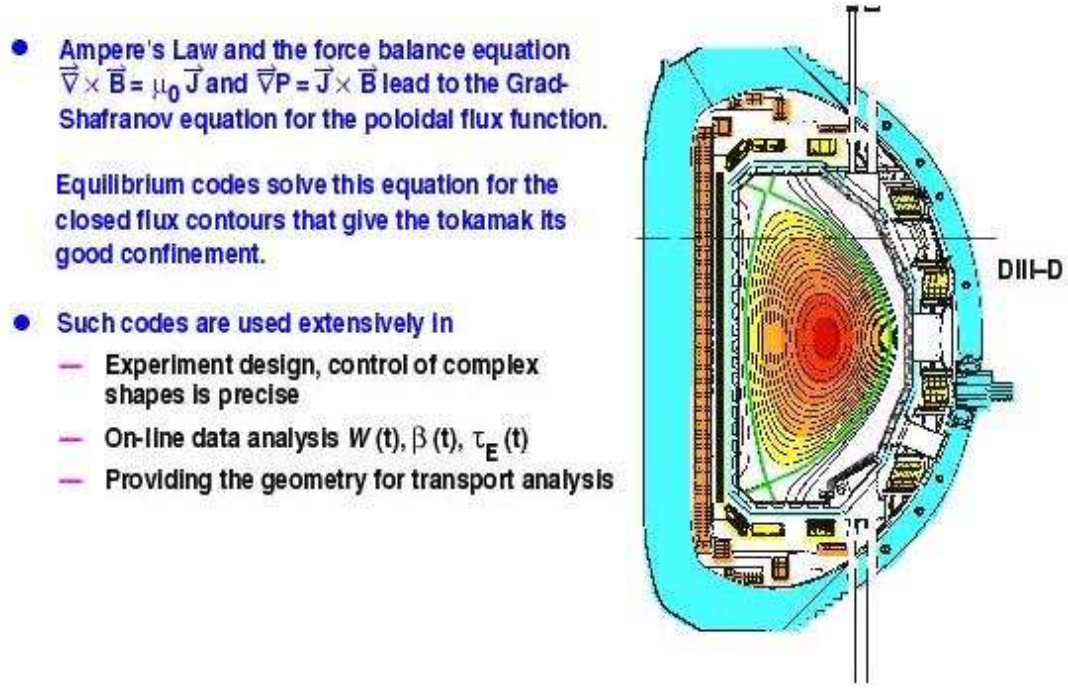


Figure 61: closed, nested magnetic surfaces in a tokamak.

Particles moving along such field lines cancel or short circuit charge separation by Debye shielding, so that $\vec{E} \times \vec{B}$ drifts and the worst instabilities are suppressed.
Nun etwas genauer mit Parametern:
Bei älteren Maschinen galt: $T_e(r)$ fällt von r=0 bis r=a (a=kleiner Radius). Da die Leitfähigkeit $\sigma \propto T_e^{3/2}$, gilt dies auch für die Stromdichte. Abb. 62 zeigt typische Profile der Stromdichte, B_{pol}, Gesamtstrom und sicherheitsfaktor q in einem typischen Tokamak mit $B_T \sim$2-5 T, und R/a$\sim$3-4. Im Bild unten Rechts sieht man, dass q(a)$\simeq$= 3,8 (3-4 ist

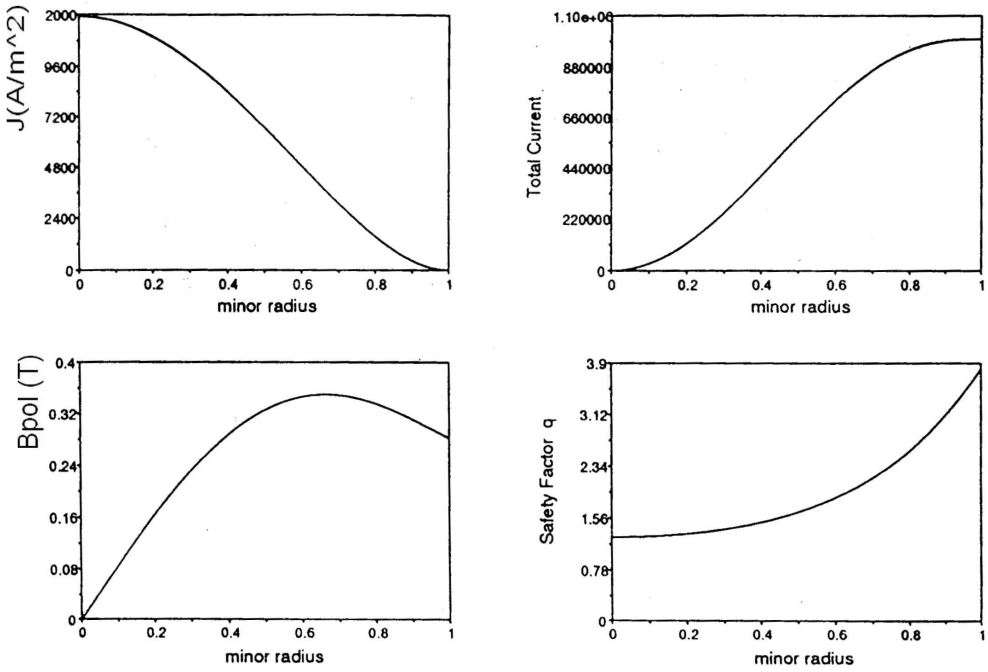


Figure 62: Profile der Stromdichte, B_{pol}, Gesamtstrom und sicherheitsfaktor q in einem typischen älteren Tokamak.

gewünscht). Es gilt auch

$$B_{Pol}(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r} \qquad \text{mit} \qquad I(r) = 2\pi \int_0^r j(r')r'dr'$$

Neuere Experimente können etwas daran drehen. Mehr nach einer Beschreibung einer typischen Entladung
Energy confinement is limited by thermal conduction, by (turbulent) convection, and by radiation

$$\tau_E \sim \frac{W}{P_{in}} \sim \frac{3}{2} n \frac{(T_i + T_e)}{P_{in}}$$

A Typical Tokamak Discharge is shown in Fig. 63 right side.
Gezeigt werden die Zeitabhängigkeit von Transformatorstrom, Umfangsspannung, Plasmastrom, Plasmadichte, Heizleistung, Plasmaenergie, und Elektronentemperratur T_e.
Vor der Entladung: Vakuum 10^{-8} mbar. Nachdem das äussere Magnetfeld aufgebaut wird, wird der Strom im Transformator hochgefahren.
Kurz vor Beginn wird Gas eingelassen, der Druck steigt auf 10^{-5} mbar. Dann wird der Transformatorstrom langsam heruntergefahren. Eine Umfangsspannung von ca. 10 V wird induziert, die die Entladung startet. Wasserstoff Gas wird ionisiert, die Plasmalage, -Querschnitt und Strom werden geregelt (Feedback-Kontrolle). Ein langsamer Stromaufbau verringert Instabilitäten. Die Dichte wird durch weiteren Gaseinlass auf den gewünschten Wert gehalten. Wenn der gewünschte Strom erreicht wird, wird weiter geheizt und die eigentliche Experimente werden durchgeführt. Wenn im Transformator das Stromminimum erreicht, wird (hier nach 4 sec), ist keine weitere Flussänderung möglich und der Plasmastrom nimmt langsam ab.

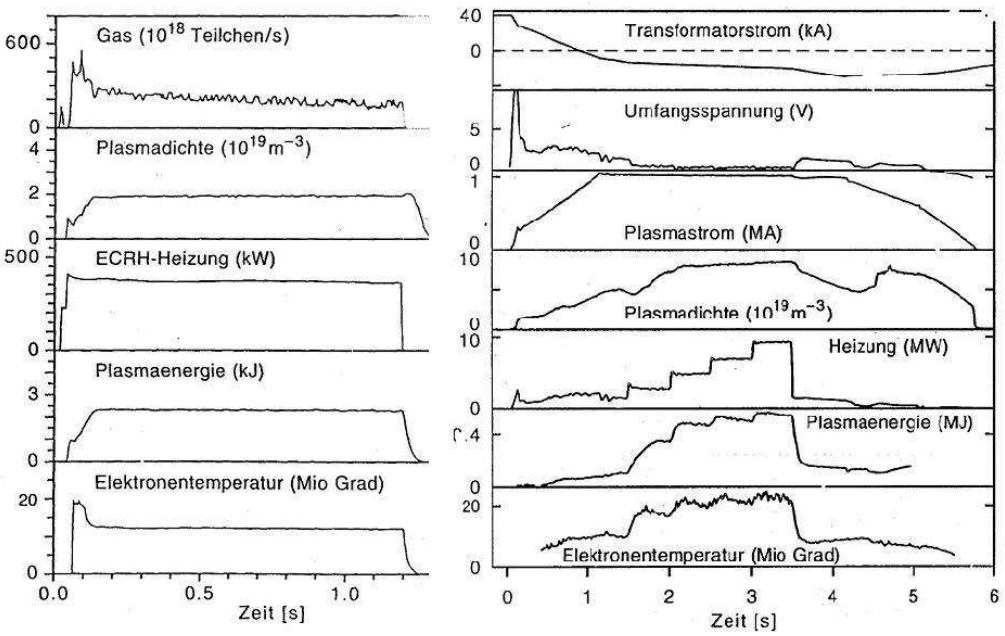


Figure 63: Typical Stellarator and Tokamak discharges

A typical Stellarator discharge is shown in Fig. 63, left side.
Kurz vor der Entladung wird Wasserstoffgas in das leere Gefäss eingelassen. Das Plasma wird durch ECRH erzeugt (Stossionisation). Allein die Dauer der Heizung bestimmt das Ende der Entladung.

4.3 Diagnostik

Wie misst man Plasma-Eigenschaften?
Um zu verstehen, wie sich ein System verhält, muss man seine Eigenschaften messen. Dies ist besonders wichtig bei extremen Parametern, wie in einem Fusionsplasma.
Die physikalischen Prinzipien der Methoden sind vielfältig. Und Diagnostik ist ein wichtiger Teil der Fusionsexperimente.
Grobe Einteilung: Elektromagnetische Strahlung [passiv (was kommt aus?) oder aktiv (man sendet was ein- was kommt zurück?)] und Teilchen (Produkte aus Ladungsaustausch oder Fusionsprodukte, falls vorhanden)
Was ist zu messen? $n_e \simeq n_i$; T_e; T_i; $n_{inpurity}$; $j(r)$, I_p, B_θ (alle am Besten abhängig von Ort, Zeit), Lage des Plasmas, ...
Magnetische Sensoren können den Plasmastrom I_p, genaue Lage und Form (position + shape), und U_{loop} mit magnetischen Spulen (magnetic pickupcoils) gemessen werden. Dies ist besonders wichtig, wenn an diesem Parameter manipuliert werden soll, z.B. mit wachsendem Plasmadruck wird die magnetische Achse des Plasmas nach außen verschoben (Schafranov Verschiebung) bis sie bei sehr hohem β_{pol}

$$(\beta_{pol} =< p > /[B_\theta^2(a)/2\mu_0])$$

mit dem halben Plasmaradius vergleichbar wird. Dies stellt eine Stabilitätsgrenze dar.

Man kann mit Strömen in den Poloidalen Spulen oder durch geeignete Heizungsszenarien dies entgegenwirken, aber zuerst muss das gemessen werden.

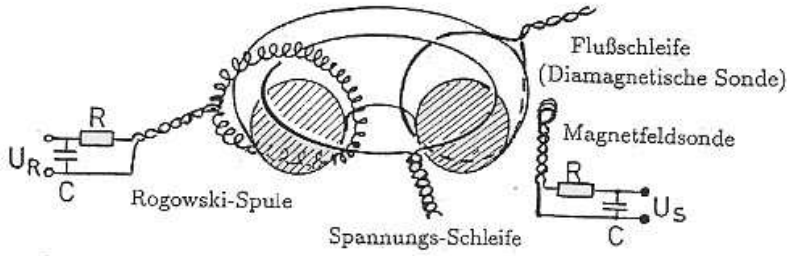


Figure 64: Schema von Spulen und Schleifen zur Messung von Strömen, Spannungen, Magnetfeldern und Druck im Plasma.

Eine einfache Magnetfeldsonde (Induktionsspule, oder Spule in poloidalen Richtung) misst die Änderung eines Magnetflusses durch die Spule (Faraday Gesetz) - Fläche der Spule = A, mit N Wicklungen

$$\Rightarrow U = N \oint_l \vec{E} d\vec{l} = N \int \underbrace{\nabla \times \vec{E}}_{-\partial \vec{B}/\partial t} \cdot d\vec{S} = -NA\frac{dB}{dt}$$

(B sei homogen über die Fläche A). Somit hat man $\partial B_{pol}/\partial t$ gemessen. Mit Hilfe eines RC-Integrationsstromkreis erhält man auch B_θ.
Need poloidal array to determine the plasma shape, horizontal and vertical position - also fluctuations - when the plasma shape is not symmetrical, this may require extensive computational effort.
Fluktuationen können auch gemessen werden.
Die Schleifenumfangsspannung U_{loop} ist besonders interessant für Tokamaks. Diese Spannung wird in Transformatoren induziert und treibt den Plasmastrom in Tokamaks an. $I_p \sim const \Rightarrow$ toroidal loop measures the resistive component U_p directly, und somit auch den Widerstand

$$R_{plasma} \sim \frac{U_{loop}}{I_p} = \frac{2\pi R_0}{\pi a^2 \sigma} \sim \frac{2\pi R_0}{a^2 \sigma}$$

$$(\sigma = \text{conductivity})$$

Eine Rogowski Spule ist eine Sonderspule, die die poloidale Richtung umfasst mit n_c Windungen/Länge und konstante Fläche A. Der Magnetfluss ist

$$\Phi = n_c \oint_l \int_F \vec{B} d\vec{A} d\vec{l}$$

$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$ und nur B_0 ist interessant (die Spule muss entsprechend ausgelegt werden)

$$\Rightarrow \text{induzierte Spannung} \quad U = \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 n_c A \frac{dI_p}{dt}$$

oder mit RC - Kreis zum Integrieren

$$U_{Rog} \rightarrow n_c \frac{\mu_0 A}{RC} I_p$$

Vertikale Bewegung kann auch erfasst werden.
Eine diamagnetische Schleife misst den toroidalen Fluss im Plasma und somit auch den Plasmadruck (indirekt).

Strahlung (Passiv oder Aktiv)
Spektroskopie (Strahlung von Ionen auch Verunreinigungen) - solche Strahlung wird nur wenig absorbiert. Wellenlänge-Bereich Infrarot bis weiche Röntgen (1000 nm bis 1 nm);
Es gibt 3 Mechanismen

1. Bremsstrahlung - emittiert wenn Elektronen mit Ionen stoßen. (free-free radiation) - Das Spektrum ist kontinuierlich und die Intensität $\sim e^{-hv/k_B T_e}$ (Dies ist hilfreich, wenn man T_e messen will).
2. Rekombination - (free - bound) - ein freies Elektron wird von einem Ion gefangen - Das Spektrum ist kontinuierlich, aber mit Kanten (Fig.65).
3. Linienstrahlung

Die Intensität der Bremsstrahlung in einem Stoß mit einem Ion der Ladung $Z_i e$ ist proportional zu Z_i^2. Die Gesamtintensität $\propto \sum_i n_i Z_i^2 = Z_{eff}^{(2)}$, Z_{eff} kann aus der Intensität bei niedrigeren Photonenenergie bestimmt werden.
Linienstrahlung - meistens zur Feststellung von Verunreinigungen. (Konzentration, Transport der Verunreinigungen). Die Methoden sind natürlich unterschiedlich für sichtbare und UV (700-200 nm); UV und weiche Röntgenstrahlung (200 - einige nm), Röntgenstrahlung (2 - 0,1 nm).

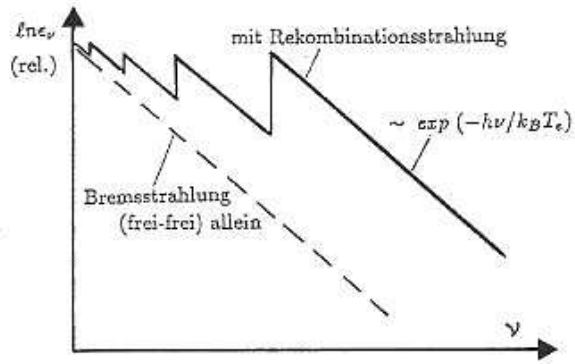


Figure 65: Qualitativer Verlauf der Kontinuumsstrahlung eines Plasmas als Summe von Brems- und Rekombinationsstrahlung

Die Dopplerverschiebung verursacht eine Linienbreite, da $\nu \simeq \nu_0(1 + (v \cos\alpha)/c)$ (gemittelt über α). Dann ist

$$I_\nu \simeq I_0 \cdot exp\left[-\frac{m_i c^2}{2k_B T_i}\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^2\right]$$

Wenn das Plasma als ganze um eine Achse dreht, gibt diese Rotationsgeschwindigkeit auch einen Beitrag.

ECE (Electron Cyclotron Emission)

Die Plasma Elektronen, die sich mit der Zyklotronfrequenz auf Kreisbahnen um die Magnetfeldlinien bewegen, strahlen dabei Wellen dieser Frequenz und deren Oberschwingungen ab: $\omega = k\omega_{ce} = keB/m_e, \quad k = 1, 2, 3, ...$

$B = 4\,T \quad \Rightarrow \omega_{ce} \sim 2\pi(112\,\text{GHz}), \quad \lambda \sim 2,8\,\text{mm}$

Die Intensität der 2. Oberschwingung hängt von der Temperatur ab, die auf dieser Weise gemessen werden kann. Die Resonanz ist ziemlich scharf und die Emission bei k=1,2,3 so groß, dass die Strahlung auch absorbiert wird - die Intensität folgt die Planck'sche Verteilung. Bei $\lambda \sim$ einigen Millimetern erhält man $I(\omega) \propto \dfrac{\omega^2 T_e}{8\pi^2 c^2}$ (long wavelength approximation).

Man kann T_e auch messen, indem man Licht ins Plasma einstrahlt und das gestreute Licht nachweist (Thomson Streuung). Das Licht wird vorwiegend von den Elektronen gestreut. Analog zu Radargeschwindigkeitsmessung für Autos erleidet das Licht eine Frequenzänderung auf Grund der Dopplerverschiebung. Aus einer genauen Freqenzmessung kann man die Elektronentemperatur bestimmen.

Exakter:

$\Delta\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}, \quad$ mit $\vec{k} = \vec{k}_{in} - \vec{k}_{out}$.

Auch ist $v/c = \sqrt{(2k_B T_e)/(511keV)}$. Wenn $k_B T_e$=1 keV, ist v/c=0,0626.

Meistens wird Laserlicht mit $\lambda \sim 1,06\,\mu$m und/oder ca. 700 nm benutzt. Mikrowellen können auch benutzt werden. Ein Problem ist, dass nur wenig Licht gestreut wird ($P_{out}/P_{in} \sim 10^{-13}$!)

(Relativistisch gilt $\dfrac{\Delta f}{f} \sim \sqrt{\dfrac{1 - v/c}{1 + v/c}} \simeq 1 - v/c$)

Aus der Frequenzverschiebung erhält man T_e. Aus der Intensität des gestreuten Lichts kann man auch etwas über die Elektronendichte lernen. Mit geeigneten Detektoren, die das Streulicht von verschiedenen Orten auf sammeln,erhält man Dichte und Temperaturenprofile. Wenn gepulstes Laserlicht benutzt wird, erhält man Daten nur während des Pulses. Mit 50-100 Pulsen/sek (möglich mit Nd:YAG Lasern ($\lambda = 1,06\mu$ m)) misst man auch den zeitlichen Verlauf.

Interferometrie

Der Brechungsindex eines Plasmas hängt von der Frequenz ab (und auch von der Dichte, vom Magnetfeld, vom Winkel zwischen $\vec{B}$ und $\vec{k}$, von der Polarisation, etc.).

Wenn $\vec{B}_0 \perp \vec{k}$ und $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$ gilt

$N \simeq \sqrt{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}$, mit $f_p = 9\sqrt{\dfrac{n}{m^{-3}}}$Hz. Wenn $n = 10^{20} m^{-3}$ gilt $f_p \simeq 90$ GHz.

Die Phasenverschiebung, wenn ein Laserstrahl durch ein Plasma geht ist ($f_p \ll f_0$)

$N \simeq 1 - \dfrac{e^2 n_e}{2\varepsilon_0 m_e \omega_0^2}; \quad \Delta\Phi \simeq \int \Delta k \cdot dx = \int_L \dfrac{\omega_0}{c}(1 - N) \cdot dx \simeq \dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 m_e \omega_0} \int_L n_e \cdot dx$

Zur Messung von $\int n_e \cdot dl$ wird ein Mikrowellenstrahl gesplittet und zum Teil durch das Plasma und zum Teil durch die Luft geschickt. Bringt man die beiden Teilwellen wieder zusammen (Michaelson Interferometer z.b.) kann man aus dem entstehenden Interferenzmuster auf sie Änderung der Wellengeschwindigkeit und $\int n_e \cdot dl$ schließen.

Ortsauflösung ist nicht möglich.
Polarimetry nutzt den Faraday Effekt (Herleitung im Sommer) aus, da Laserlicht nicht nur eine Phasenverschiebung , sondern auch eine Rotation der Polarisationsebene (Faraday Rotation) erfährt. Diese ist (ungefähr) proportional zur Komponente des B-Feldes, parallel zur Ausbreitungsrichtung und zur Dichte.
Rotationswinkel $\propto \int n_e B_{\parallel} \cdot dl$
Soweit man $n_e(r)$ unabhängig messen kann und mit verschiedenen Winkeln ist es möglich, $B_{pol}(r)$ zu ermitteln.
Reflectometry
Wenn eine EM Welle durch ein inhomogenes Plasma sich fortpflanzt und einen Bereich erreicht, wo $n_e = n_{crit}$ (z.B. $\omega_0 = \omega_{pe}$) wird die Welle reflektiert (analog Totalreflexion). Mann konstruiert einen Michaelson Interferometer und lässt die Cutoff Schicht als einer der Spiegeln fungieren. Durch Variation der Frequenz erhält man $n_e(r)$.

Messung von T_i
Da das Plasma nicht im thermischen Gleichgewicht ist, gilt Allgmeinen $T_i \neq T_e$ (vor allem, weil man auch verschiedene Heizmethoden benutzt). Man muss T_i unabhängig messen.
a) CEX (Ladungsaustausch):
Wenn Ionen kollidieren mit neutralen Teilchen, kommt es manchmal zu einer Ladungsaustauschreaktion. Auch (hauptsächlich) zwecks Plasmaheizung injiziert man Strahlen aus neutralen Teilchen ins Plasma. Bei Stößen eines neutralen Teilchens mit einem Ion bleibt ein Elektron am Ion hängen und das neue neutrale Atom strahlt (es ist fast immer in einem angeregten Zustand). Außerdem wird es nicht mehr eingeschlossen und verlässt das Plasma. Aus dem Linienspektrum, sowie aus der Energieverteilung der neutralen Teilchen, die nach Ladungsaustausch das Plasma verlassen, gewinnt man Auskunft über die Ionentemperatur.
b) Spektroskopie
Oder man benutzt das Licht, das Verunreinigungsatome im Plasma ausstrahlen. Verunreinigungen sind oft nicht voll ionisiert (besonders am Plasmarand) und emittieren charakteristisch Linienstrahlung. Aus der Dopplerverbreitung dieser Linien erhält man Auskunft über die Geschwindigkeitsverteilung der emittierenden Atomen.
Die Spektroskopie der Linienstrahlung gibt auch Auskunft über die Art und Konzentration der Verunreinigungen. Vergleicht man die so gewonnenen Profile der Verunreinigungskonzentration mit dem Transportmodellen, so lässt sich auch Aufschluss über Transportprozesse im Plasma gewinnen (z.B. Transport parallel zu $\vec{B}$ ist viel schneller als Transport senkrecht zu $\vec{B}$).
Da die von einer Ionensorte ausgesandte Linienstrahlung stark von der Temperatur abhängt, überstreicht die Strahlung einen weiten Frequenzbereich (vom Infrarot bis Röntgen).
Beispiel: leichtere Atome wie Sauerstoff im heißen Plasmazentrum sind vollständig ionisiert und senden keine Strahlung aus. Mit zunehmendem Abstand vom Zentrum werden die Atome nur teilweise ionisiert und befinden sich im tiefen Energiezuständen, was sich in der niedrigeren Frequenz ihrer Strahlung wiederspiegelt.
Vom kühleren Plasmarand kommt vorwiegend sichtbares Licht, von den inneren Bereichen eher UV bis Röntgenstrahlung. Daher muss man verschiedene spektroskopische Methoden benutzen, um die unterschiedlichen Bereiche abzudecken.

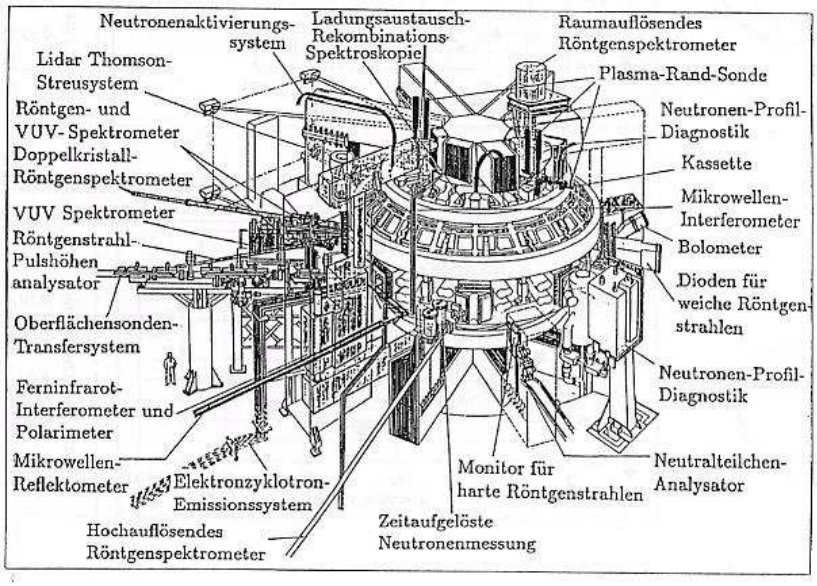


Figure 66: Diagnostiksysteme am europäischen Fusionsexperiment JET (vom JET Joint Undertaking)

Anmerkung: In heutigen Experimenten ist bis zu 40% der Verluste in Form von Linienstrahlung (gewollt am Rand, aber nicht im Zentrum). Verunreinigungen im Zentrum verhindern die Zündung.

4.4 Plasma Heizung

Bis zur Zündung muss das Fusionsplasma von Außen geheizt werden. Nach der Zündung können die produzierten α-Teilchen das Plasma heizen und die Verluste (Strahlung und Teilchenverluste) kompensieren. Für Heizung stehen mehrere Methoden zur Verfügung.
Im Tokamak gibt es auf jeden Fall die Ohm'sche Heizung, da ein grosser Strom ($\sim$ MA) fließen muss, um das poloidale Magnetfeld zu erzeugen.

$$P_\Omega = \eta j^2$$

Aber $\eta \propto T_e^{-3/2}$ und damit ist diese Methode unwirksam für $T_e > 1\,\text{keV}$.
($T_e \gtrsim 10 - 15\,\text{keV}$ ist erforderlich). Außerdem ist Ohm'sche Heizung nicht brauchbar für Stellaratoren (gewünscht ist $I \simeq 0$ damit die Magnetfeldstrukturen nicht gestört werden).
α-Teilchen Heizung wird am Ende die Temperatur in einem Fusionsreaktor aufrechterhalten. Bisher wurde sehr wenig mit einer D-T-Mischung experimentiert und so hat man wenig Erfahrung. Am Anfang haben die α-Teilchen 3,5 MeV Energie und müssen solange eingeschlossen werden, bis sie diese Energie an andere Plasmateilchen abgeben. Danach sollen sie entfernt werden. Zusätzliche Methode zum Stromtreiben könnten, um das Stromdichteprofil zu kontrollieren, erforderlich sein.
Die gängigste Methoden sind Heizung mit elektromagnetischen Wellen oder mit injezierten Neutralteilchen.
Heizen des Plasma bedeutet, dass die kinetische Energie der Elektronen und Ionen erhöht wird. Die verschiedenen Plasma-Konstituenten werden nicht alle gleich geheizt; die

Geschwindigkeitszunahme ist außerdem nicht isotrop. Ergebnis ist eine Abweichung von einer Maxwell'schen Verteilung. Und die zugeführte Energie wird zum Teil in Form höherer Strahlungsverluste und Diffusion zu den Wänden verloren gehen.
Wenn ein Neutralstrahl schräg injeziert wird oder wenn EM-Wellen in einer Richtung (bezogen auf das Magnetfeld) eingeschossen werden, wird nicht nur Geheizt, sondern wird das Stromdichteprofil auch geändert (die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen bezüglich der Richtung des Magnetfeldes). Dies ist eine Art nicht induktive Stromtreiben. In Tokamaks kann dies ausgenutzt werden um die Pulslänge zu erhöhen und auch das Stromdichteprofil zu beeinflussen. In Stellaratoren kann man ungewollten Strömen unterdrucken.

4.4.1 Heizmethoden

Neutralinjektion (NBI)

Ein Strahl neutraler Atome (D oder T sind auch gleichzeitig Brennstoffe) wird in das Plasma eingeschossen. Diese Neutralatome können die Magnetfeldlinien berqueren, und werden durch Stöße mit den Plasmateilchen ionisiert. Diese neuen Ionen bertragen Energie zum Plasma auch durch Stöße. Strahlenergie und Plasmadichte bestimmen den Ort,wo die meisten Neutralteilchen ionisiert werden.
Ionisierung erfolgt meist durch Ladungsaustausch ($E_b < 90\,\mathrm{keV}$) oder durch Stöße mit Ionen ($E_b > 90\,\mathrm{keV}$). Damit die injezierten Teilchen in das Plasma eindringen können, muss deren kinetische Energie ziemlich groß sein ($\gtrsim$ 100 keV; bei ITER eher 1 MeV!) da die absorbtionslänge sonst zu klein ist und nur den Plasmarand geheizt würde. Injektion erfolgt bei einem kleinen Winkel mit dem Magnetfeld um das Einfangen der Ionen in Magnetspiegeln zu verhindern (dies ist technisch schwierig).

Produktion der Neutralstrahlen

Ionen werden beschleunigt, dann wieder in einer Umladungszelle neutralisiert. Die übrig gebliebenen Ionen werden abgelenkt. Wie schon gesagt soll die kinetische Energie $> 100\,\mathrm{keV}$

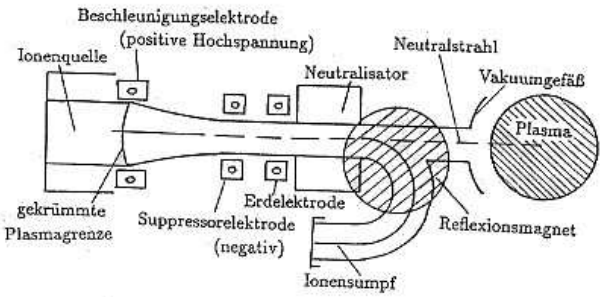


Figure 67: Schema eines Neutralinjektions-Heizsystems

sein (sogar $> 500\,\mathrm{keV}$ bei ITER, sollten die Teilchen zum Plasmazentrum gelangen), und außerdem mit einer Leistung von ca. 10 MW/Strahl. Die Teilchen müssen transportiert werden zu Raten entsprechend einem Strom von 500 A und Stromdichten $\sim 1\,A/cm^2$. Die Teilchen müssen sehr gut Kollimiert transportiert werden und die Wege müssen kurz sein. Dies bedeutet, dass die Beschleuniger nah am Torus sitzen müssen, wo sie Platz belegen und die Abschirmung erschweren.

Neutralstrahlen mit Energien bis 150 keV können mit beschleunigten positiven Ionen hergestellt werden. Bei höheren Energien ist die Rate für Neutralisierung zu klein, und man muss negative Ionen beschleunigen.
TFTR hatte 12 Quellen mit bis zu 120 keV und konnte bis 22 MW auf einmal injezieren. JET hat 20 MW mit ca. 80 keV; vor kurzem wurde die Energie auf 100 keV erhöht. JAERI entwickelt eine Quelle mit 500 keV und 10 MW. Wie erwähnt: die Injektion von energiereichen (bei größeren Anlagen > 200 keV) Neutralteilchenstrahlen werden nicht nur genutzt um das Plasma zu heizen, sondern auch um den Plasmastrom zu kontrollieren (und Brennstoff ins Zentrum des Plasmas einzuschießen)
Neutralstrahlheizung + Stromtrieb wurden schon früh eingesetzt und sind sehr wichtig gewesen für Studien eines Plasmas bei hohen Temperaturen und hohem β (hier bedeutet hoch $0,04 < \beta < 0,09$).
Das Plasma ionisiert die Atome. Dann hat man zuerst energetische Iononen, die durch Stöße thermalisiert werden (zuerst durch Stöße mit Elektronen; die Geschwindigkeitsrichtung wird kaum geändert. Bei niedrigeren Energien durch Stöße mit Ionen). Inzwischen gibt es Programme, diese Prozesse realistisch zu berechnen. Injektion in toroidaler Richtung treibt Strom.
Mit NBI konnte eine Ionentemperatur bis 45 keV erreicht werden (in Princeton) (Abb. 68)
Experimente in JAERI haben Strom mit NBI getrieben. Unter Nutzung der neuen Quelle

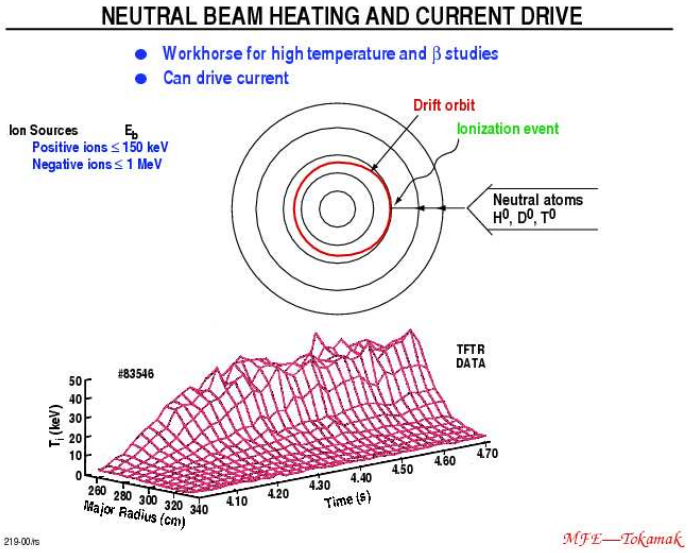


Figure 68: Neutral beam heating used at TFTR in Princeton to heat ions to a temperature of 45 keV.

mit 500 keV und dem sogenannten "Bootstrap current", der durch Druckgradienten entsteht (mehr später), konnte ein Plasmastrom von 1 MW für ca. 1/2 Sek. aufrecht erhalten werden.

4.4.2 Radiofrequenz

Das Plasma wird mit elektromagnetischen Wellen bestrahlt, die im Plasma absorbiert werden. Durch solche Einstrahlung von Wellen (die sich im Plasma als Plasmawellen fortpflanzen)

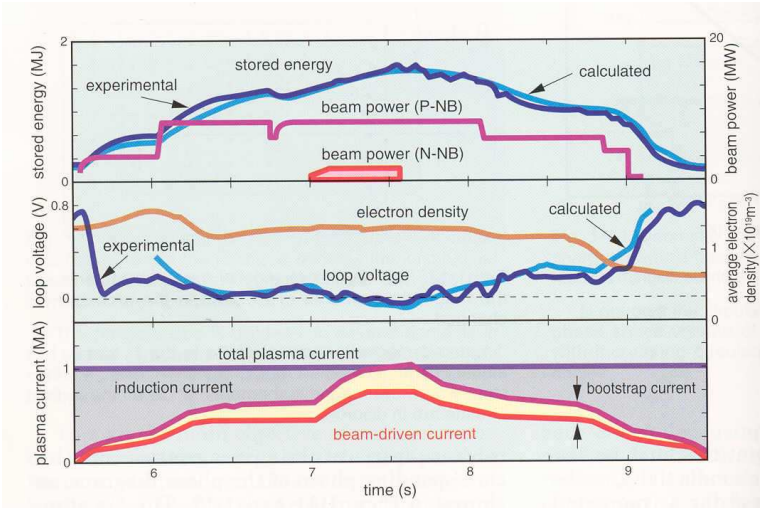


Figure 69: Production of 1 MA plasma current using only NBI and the bootstrap current. Conventional neutral beams produced from positive ions (P-NB) were injected from time 6–9 seconds. The new N-NB, with 500 keV, derived from negative ions, was injected at time 7–7.6 seconds (top picture). The loop voltage was very small during NBI injection, while the electron density did not change much. During the short time that N-NB was present, the beam-driven and bootstrap currents provided the total plasma current (1 MA); the induction current was zero during this time interval.

kann man nicht nur heizen, sondern auch Strom treiben (Absorption der Welle beeinflusst die Geschwindigkeitsverteilung, zumindest (oder oft) lokal.) Die Absorption ist effektiver, wenn die Frequenz der anregenden Welle in Resonanz mit einer Plasma Schwingung oder Teilchen Bewegung ist. (Brechungsindex $\to 0$). Bei Cutoff, der Brechnungsindex $\to \infty$ und $v_\phi \to 0$. Die Welle wird totalreflektiert.
Dabei kommen die Zyklotron Frequenzen der Elektronen oder Ionen, sowie die so genannte Hybrid-Frequenzen in Frage: $\omega_c = eB/m_e$, $\Omega_c = eB/m_i$, $\omega_{LH} \simeq \sqrt{\omega_c \Omega_c}$

$$\begin{aligned}
\omega_p^2 &= \frac{e^2 n}{\epsilon_0 m_e} = \frac{m_i}{m_e}\Omega_p^2 \\
f_{ce} &= \frac{\omega_{ce}}{2\pi} \sim 28\,GHz \times B(T) \\
f_{ci} &= \frac{\Omega_{ci}}{2\pi} \sim 15\,MHz/A \times B(T) \\
f_{LH} &\approx \frac{\sqrt{f_{ce} f_{ci}}}{\sqrt{1 + \omega_c^2/\omega_p^2}} \\
2\pi f_{UH} &= \sqrt{\omega_c^2 + \omega_p^2}
\end{aligned}$$

In Fusionsplasmen ist ω_c vergleichbar mit ω_p und es gilt

$$\omega_c^2 \gg \Omega_p^2 \gg \Omega_c^2$$

Ω_p^2 und $\omega_c\Omega_c$ sind vergleichbar.
Bei einem Magnetfeld von 5T und einem Deuterium Plasma bedeutet dies

$$f_{ce} = 140 \text{ GHz}, \; f_{ci} = 37,5 \text{ MHz}, \; \text{und} f_{LH} \sim 2 \text{ GHz}$$

Die Thermalisierung der auf diese Weise auf die Teilchen übertragenen Energie erfolgt über Stöße mit den anderen Plasmateilchen.
Immer : Leistung mehrere MW, und Dauerstrich bedeutet thermische Belastung aller Komponenten (Quellen, Ubertragungskomponenten, Antennen).

ICRH (Ion Zyklotronresonanzheizung)
Vorteil - Generatoren und Transmissions Komponenten wurden schon für Radio Anwendungen entwickelt. Absorptionswirkungsgrad in heißen und dichten Plasma ist hoch. Die Antennen müßen allerdings ziemlich groß sein. Bei 30 MHz hat die Antenne etwa die Größe einer Wellenlänge $\lambda \sim 10\,\text{m}$ Dies ist unbequem gross.
JET hat f zwischen 23-57 MHz, 16 Quellen, 8 Antennen, P_{Plasma} bis 22 MW

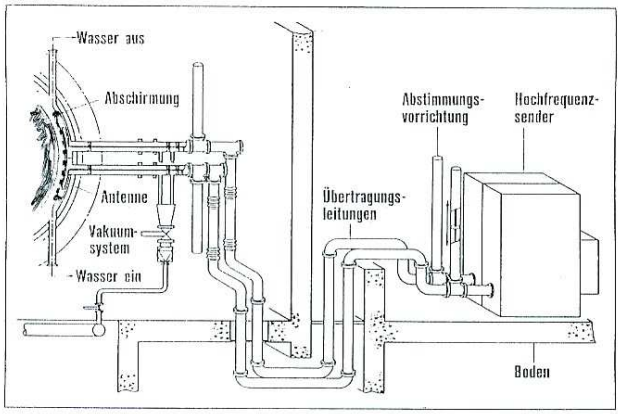


Figure 70: Schematic of ICRH plant for one antenna array.

D3D hat 2 MW bei 30-120 MHz. die meisten anderen Experimente haben vergleichbare Werte.

ICRH kann Strom treiben. Über die Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Moment eines Elektrons und dem Axialen Komponenten des Wellen-Magnetfeldes wird die Welle gedämpft. Die Kraft ist proportional zu $\mu_e \nabla_\parallel B_{Welle}$ (einige energetische Elektronen sind erforderlich. Das Prozess heisst *Transit time magnetic pumping* (TTMP))

Lower Hybrid
JET hat auch (Stand 1992 aber wenig geändert) ca. 6 MW für LH-Heizung bei 3.7 GHz (Quelle sind Klystrons). Diese werden vorwiegend zum Stromtreiben benutzt (Der Absorptions mechanismus ist Landaudämpfung. Die Phasengeschwindigkeit der Welle und die thermische Geschwindigkeit der Elektronen sind vergleichbar. Dies führt zu Absorption, da bei geeigneter Phasenlage mehr Elektronen durch die Welle beschleunigt werden als gebremst. $I_{pmax} \sim$(6-7) MA und bis 1 MA kann nicht induktiv (d.h. ohne Transformatoren) aufrechterhalten werden.

ECRH (Elektron Zyklotronresonanzheizung)
Vorteile: Die Leistung wird sehr lokalisiert deponiert, da das Magnetfeld inhomogen ist. Einstrahlung bei ω_c oder be $2\omega_c$ ist möglich. Man kann das Dichteprofil (auch Stromdichteprofil) beeinflussen, da ECRH auch Strom treiben kann (wenn die Einstrahlung bei der richtigen Winkel erfolgt). Die Übertragung kann auch Quasioptisch gelingen. Dann ist keine Antenna sehr nah am Plasma erforderlich und die Quellen können weit weg vom Plasma sein. Das

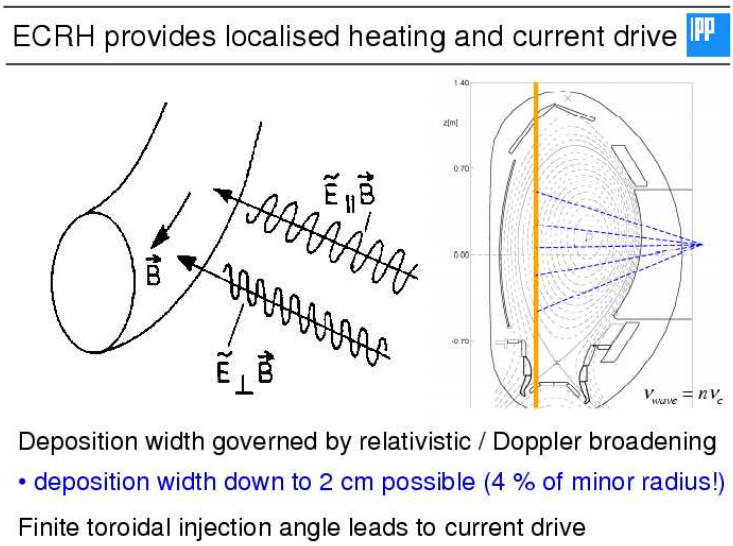


Figure 71: Welleneinstahlung bei der Elektronenzyklotronresonanzheizung.

Stromprofil wird durch Bewegung des Resonanzortes beeinflusst. Aber die Quellen (Gyrotrons) sind teuer und genügen noch nicht allen Wünschen (durchstimmbarkeit). Es hat in den letzten 10 Jahren grosse Fortschritt bei der Quellenentwicklung gegeben. Im Jahr 2000 erreichte man bei 140 GHz ca. 500 kW bei einer Pulslänge von einiger Sekunden und ca. 1 MW bei pulslängen von $\sim$(5-10) ms.
Im Jahr 2005 erreichte man 800 kW für mehrere Minuten (bis 1/2 h) und bis 2 MW für einige ms. Auch bis 1 MW bei 170 GHz (einige Sekunden)
Der Stellarator Wendelstein W7-AS hat mehrere Gyrotronen bei 70 GHz eingesetzt, mit 200 kW und (fast) Dauerstrich, sowie 140 GHz und Leistung <500 kW bei einer Pulslänge von einiger Sekunden. Das geplante Experiment W7-X braucht 10 MW bei 140 GHz und Dauerstrich.
Asdex-Upgrade benutzt mehrere Gyrotrons bei 140 GHz mit einer Gesamtleistung von 2 MW um den Einschluss zu verbessern, Strom zu treiben, und dadurch einige Instabilitäten zu unterdrucken.
Das D3D-Tokamak in Kalifornien hat insgesamt 2 MW Leistung bei (110-120) GHz installiert. Dort ist das toroidale Magnetfeld B_T=2,2 T.
Abb. 72 zeigt die Heizungssysteme und auch die Systeme für Brennstoff-Nachfüllen bei Asdex-Upgrade.

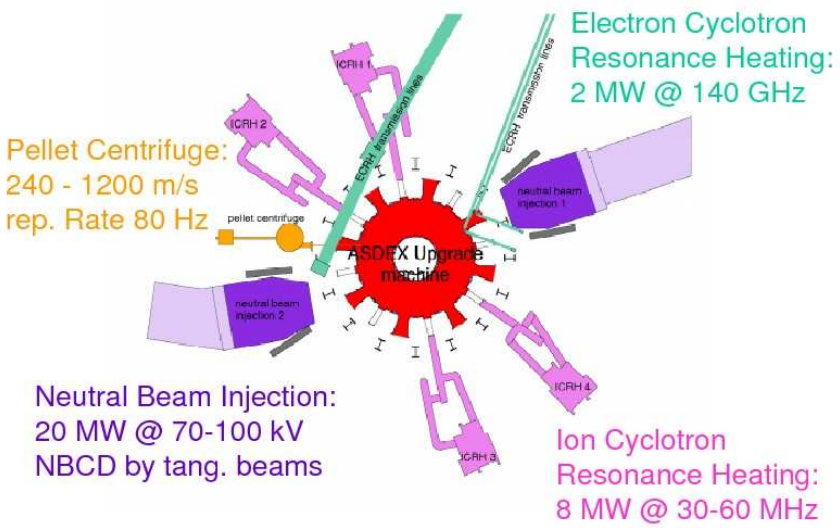


Figure 72: Asdex-Upgrade heating and fuelling systems.

4.5 Brennstoff nachfüllen

Bei D-T Fusion entstehen α-Teilchen als "Asche" des Brennprozesses. Nachdem diese den größten Teil der Energie an das Plasma abgegeben haben sind sie nur noch Verunreinigungen, die die Fusionsreaktion "ersticken" können, wenn sie noch zu lange im Plasma bleiben. Sie müssen deshalb abtransportiert werden. Dies erfolgt in Zukunft mit speziellen Kryopumpen (FZK Technologie). Dann muss auch "Brennstoff" (D+T) nachgefüllt werden. Entweder:
- Gaseinlaß vom Gefaßrand (*Gas puffing*; die Teilchen bleiben größtenteils am Plasmarand; der Wirkungsgrad ist nur 10-15%)
-Neutralteilchen Injektion bringt einen Teil; E_{kin} ist hoch.
-(seit 1996) Pellet Injektion: Deuterium oder ein D-T Mischung wird so stark gekühlt bis es friert und daraus werden Kügelchen von wenigen mm Durchmesser geformt. Dann werden diese in Gaskanonen oder in Zentrifugen beschleunigt und in das Plasma eingeschossen, wo sie verdampfen und ionisiert werden. Da die Pellets den Brennstoff gezielt an (fast) beliebiger Stelle im Plasma deponiert werden können (Steuerung durch Pelletgeschwindigkeit – schnellere Pellets erreichen eher das Zentrum), kann man mit dieser Nachfüllmethode das Dichteprofil verändern. Einschuss von der Hochfeldseite ist effektiver. Deponieren in der Mitte bedeutet weniger Verluste (von Teilchen und Energie).
Bei Asdex hat man eine Pelletzentrifuge, die 80 Pellets/sek mit Geschwindigkeiten von 1200 m/s in das Plasma schiessen kann. Jedes Pellet wiegt ca. 1 mg. Man kann somit schon 1/3 des Plasmas nachfüllen.
Es hat sich gezeigt, dass es vorteilhaft ist, zuerst am Anfang einer Entladung ein scharf gespitzten Dichteprofil zu erreichen (mit schnellen Pellets, die in das Zentrum eindringen). Dies bewirkt eine bessere Warmeisolierung der heißen Plasma Mitte und weniger Ionen Transport nach Außen. Die Ionentemperatur wird dadurch etwas reduziert, was mit ICRH und/oder ECRH kompensiert werden kann (eine minimum Temperatur ist erforderlich, um Instabilitäten (ELM oder Neoklassische Reissmoden) zu vermeiden.
Danach (vor allem nach Zünden) ist ein flacheres Dichteprofil vorteilhafter, damit das Helium besser abtransprotiert werden kann. Dann benutzt man kleinere, langsamere Pellets, die

weniger weit eindringen. Dies ist ein sehr nützliche Steuerungsmöglichkeit.
Manchmal werden die Pellets gehärtet, indem man ca. 0,5% (vol) Stickstoff dazufügt. Anscheinend wirkt dies Vorteilhaft.
In sog. "advanced tokamaks" wird sowohl das Dichte als auch das Stromdichteprofil gesteuert. Dadurch wird die "Scherung" der Magnetischen Flächen optimiert, zwecks höherer Einschlusszeit). Dies wird noch intensiv untersucht.

4.6 Kontrolle der Verunreinigungen (Limiter, Divertor)

Nachdem es mit modernen Tokamaks gelungen ist, Plasmen für einige Sekunden einzuschliessen und auf Zündtemperatur aufzuheizen, hat sich die Wechselwirkung des heissen Plasmas mit den umgebenden Wänden zu einem zentralen Untersuchungsgebiet entwickelt. Der heisse Plasmaring in Inneren des Gefässes wird von magnetischen Kräften in Schwebe gehalten. An seinem Aussenrand ist es dennoch möglich, dass das Plasma in Kontakt mit den umgebenden Wänden gerät.
Aufgrund von Stössen der Plasmateilchen untereinander breitet sich das Plasma radial aus, bis es in Kontakt mit der Wand kommt, wo es neutralisiert wird. Die Teilchen geben auch ihre Energie dort ab (ein Hauptverlustmechanismus). Dies hat zur Folge, dass Material von der Wand abgetragen wird, in das Plasma eindringt und es dabei verunreinigt und abkühlt. Ausserdem wird die zur Zündung notwendige Wärmeisolierung nicht erreicht.
Ein thermonukleares Plasma kann nur unter sehr sauberen Bedingungen brennen. Eine partielle Dichte von Metallionen aus dem Behälter von mehr als 0,1% der Wasserstoffdichte verhindert die Zundung eines D-T Plasmas in dem es die Konzentration n_D und n_T reduziert und Linienstrahlung zusatzliche Verluste bereitet. Und die Wand wird beschädigt. Die Gefässwände übernehmen an Berührungsstellen die ganze Energie, die aus dem Inneren des Plasmas transportiert wird (ca. $1\,\mathrm{MW/m^2} = 0{,}1\,\mathrm{kW/cm^2}$ unter Normalbedingungen).
Zu einer Kontrollierten Begrenzung des Plasmas wurden deshalb in früheren Experimenten Abschälplatten (Limiter=Begrenzer) in das Gefäss eingebaut, die so ausgelegt waren, dass sie die zu erwartenden Energiemengen (bis $10\,\mathrm{MW/m^2}$) aufnehmen konnten. Dabei ist aber unvermeidbar, dass Kontakt des Plasmas mit der ersten Wand und den Limiter Atomen (Eisen, Nickel, Chrom usw) aus der Wand herausgelöst werden und in das Plasma eindringen. Diese Verunreinigungen sind nicht brauchbar. Ausserdem gelang adsorbiertes kühles Deuterium auch in die Randschicht, wo es das Plasma am Rand abkühlte. Dies hat den Einschluss negativ beeinflusst. Das Plasma soll bis zum Aussenrand möglichst rein und heiss bleiben.
Der direkte Kontakt des Plasmas mit der Wand lässt sich vermeiden, wenn das Magnetfeld so ausgelegt wird, dass auf einer geschlossenen äussersten Flache des konstanten Drucks nur noch offene Magnetflächen folgen, deren Feldlinien auf die Wand treffen. Dies erreicht man durch zusätzliche kreisförmige Spulen die in Ebenen parallel zum Plasmaring liegen. Der Strom in dieser sogenannten Divertorspule ist so gerichtet, dass das Magnetfeld in ihrem Inneren dem poloidalfeld des Tokamaks entgegengerichtet ist. In der Nähe der Divertorspule ist deren Feld am stärksten und dominiert das resultierende Feld. Die Feldlinien umschliessen dort nur die Divertorspule. Geht man in Richtung zum Plasma, so nimmt die Stärke des Divertorfeldes ab. An einer Stelle werden sich das poloidale Feld des Tokamaks und das der Divertorspule aufheben. Das resultierende Feld in den sogenannten X-Punkten oder Staupunkten hat den Wert 0. In wirklichkeit handelt es sich um eine Staulinie, die einen Kreis senkrecht zur Zeichenebene in Abb. 73 (unten) bildet, der auch parallel zur Plasmaseele liegt. Die gesamte

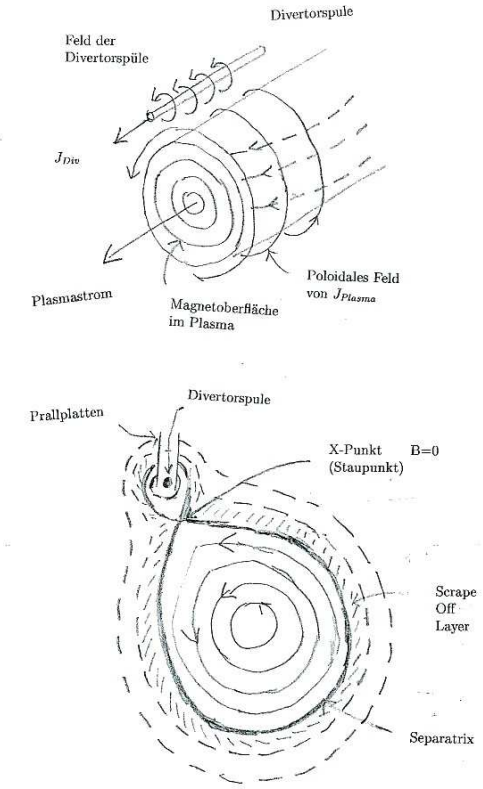


Figure 73: Erzeugung eines magnetischen Begrenzers mit Hilfe einer zusaetzlichen Spule (Divertorspule), sowie die daraus resultierenden magnetischen Oberflaechen mit Separatrix und Abschaelschicht (SOL).

Fläche, die von den Magnetfeldlinen auf der Staulinie aufgespannt wird, heisst "Separatrix". Man erhält sie, wenn man das Feldlinienbild um die Plasmaseele rotieren lässt. Sie ist die letzte geschlossene Magnetfläche und trennt das gesamte Magnetfeld in zwei Bereiche. Innerhalb der Separatrix liegen ineinander geschachtelte magnetische Oberflächen, die den Plasmabehälter nirgends durchdringen. Ausserhalb der Separatrix treten die magnetischen Oberflächen in der Nähe der Divertorspule in eine Ausbeulung des Plamabehälters, welche die Divertorkammer bildet. Weil das gut eingeschlossene Plasma durch die Form des Magnetfeldes begrenzt wird, spricht man von einem "Magnetischen Limiter." Man kann diese Idee weiterführen, und bei geeigneter Wahl der Stromstärken und der Stromrichtungen in den Spulen das Magnetfeld so formen, dass die Magnetfeldlinien jenseits der Separatrix nicht direkt auf die Wand treffen, sondern gebündelt durch ringförmige Schlitze, die in den Behälterwänden parallel zum Plasmastrom liegen, in einem getrennte Kammer abgelenkt (divertiert) werden. Dort werden sie auf gekühlten Prallplatten geleitet, wodurch sie neutralisiert werden und ihre Energie verlieren. Die stets unvermeidbare Berührung Plasma-Werkstoff wird in die Divertorkammer verlegt.

Das Hauptplasma liegt thermisch isoliert innerhalb des Separatrixteiles um den Tokamakstrom. Durch Wärmeleitung und durch Diffusion werden ein Teil der in das Plasma eingespeisten Leistung und die Plasmateilchen selbst senkrecht zu den Magnetfeldlinien transportiert. Der nicht durch Wärmeleitung trnsportierten Anteil der in das Plasma eingespeisten Leistung

verlässt das Plasma durch Strahlung und gelangt nahezu isotrop zur ersten Wand.

Nach dem Überschreiten der Separatrix strömt das Plasma längs der Feldlinien ausserhalb der Separatrix zu den Divertorplatten (DP). Es bildet sich eine dünne Plasmaschicht, der Scrape Off Layer = SOL (Abschälschicht), der die ganze Separatrix bedeckt. Die Breite des SOL hat typisch die Grösse von einigen Zentimeter. Die Strömungszeit des Plasmas längs der Feldlinien zu den Divertorplatten ist relativ kurz. Die Transportprozesse senkrecht zum Magnetfeld sind zu langsam, um den SOL während der kurzen Strömungszeit des SOL-Plasmas zu den DP aufzuweiten. Deshalb kann sich nur ein ziemlich schmaler SOL ausbilden. Die meisten Verunreinigungen, aber auch kühles Deuterium bzw. Tritium werden auf dieser Weise abgeführt.

Die Divertorplatten sind die am stärksten belasteten Teile eines Fusionsexperiments. Das entstehende Neutralgas baut in den Diverterkammern einen gegenüber dem Plasmahauptraum höheren Druck auf und kann deshalb leichter abgepumpt werden. Man schätzt, dass ca 90% der ein einem Reaktor entstehenden α - Teilchen auf diese Weise abgeführt werden kann. Ebenso können die störenden Verunreinigungen aus dem Plasma entfernt werden. Eine Solche Anordnung heisst Divertor (Ablenker) und bietet den zur Zeit besten Schutz des Plasmas vor Verunreinigungen.

Überraschend haben die ersten Experimente mit einem Divertor (Asdex 1982) auch gezeigt dass man mit einem Divertor auch bessere Einschlusszeiten erreichen kann. Dies hat mit der Erzeugung von sog. Transportbarrieren zu tun. (s. den nächsten Abschnitt)

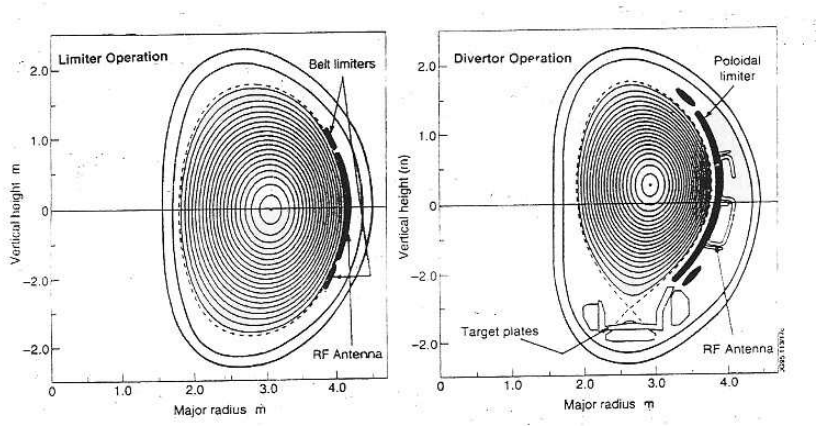


Figure 74: The JET tokamak in limiter and Divertor operational modes. Limiter plasmas have a poloidal cross-section boundary which is closed in space. This means that any impurities arising from wall interactions or fusion products recycling at the wall are ionized within the main plasma and contained. In single-null divertor (SND) plasmas, the plasma boundary is altered by external magnetic fields to form an open surface along which ionized impurities travel to a special target area where they are removed by large capacity pumps.

Ein Zusatzliches Problem ist "Recycling" das in der Nähe des heissen Plasmas stattfindet und zu einer Abkühlung des Plasmarandes führt. Energetische Ionen aus dem Plasma treffen auf die Wand, geben ihre kinetische und Ionisationsenergie (d.h. 13,6 eV/Ion) ab. Dann diffundieren sie wieder ins Plasma, werden dort ionisiert, werden wieder an die Wand gespült,

usw. Dieses Problem wird auch mit einem Divertor gelöst.
Hier werden die Poloidalfeldspulen genutzt, um das Magnetfeld so zu ändern, dass Feldlinien, die in der Nähe des Vakuumgefässes verlaufen, nicht mehr helikal um den Torus herumführen, sondern nach ca. 1,5 toroidalen Umdrehungen in die Divertorkammer geleitet werden. Neben der stark reduzierten Wahrscheinlichkeit dafür, dass erodierte Atome das Plasma erreichen können, entsteht in der Divertorkammer durch Recycling (hier gewollt) eine höhere Plasmadichte und dadurch eine niedrigere Temperatur. Dadurch können die dort neutralisierten Gase (D,T,He, usw) besser abgepumpt werden. Die zusätzliche äussere poloidale Felder

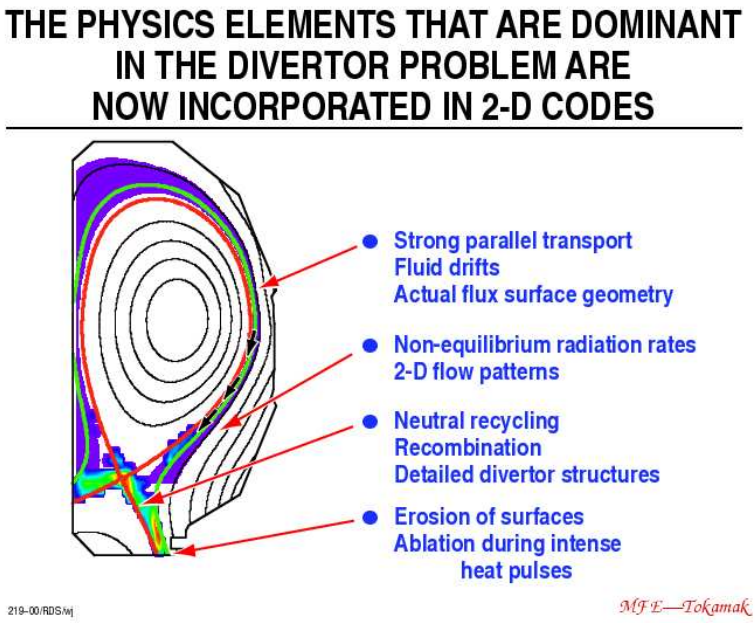
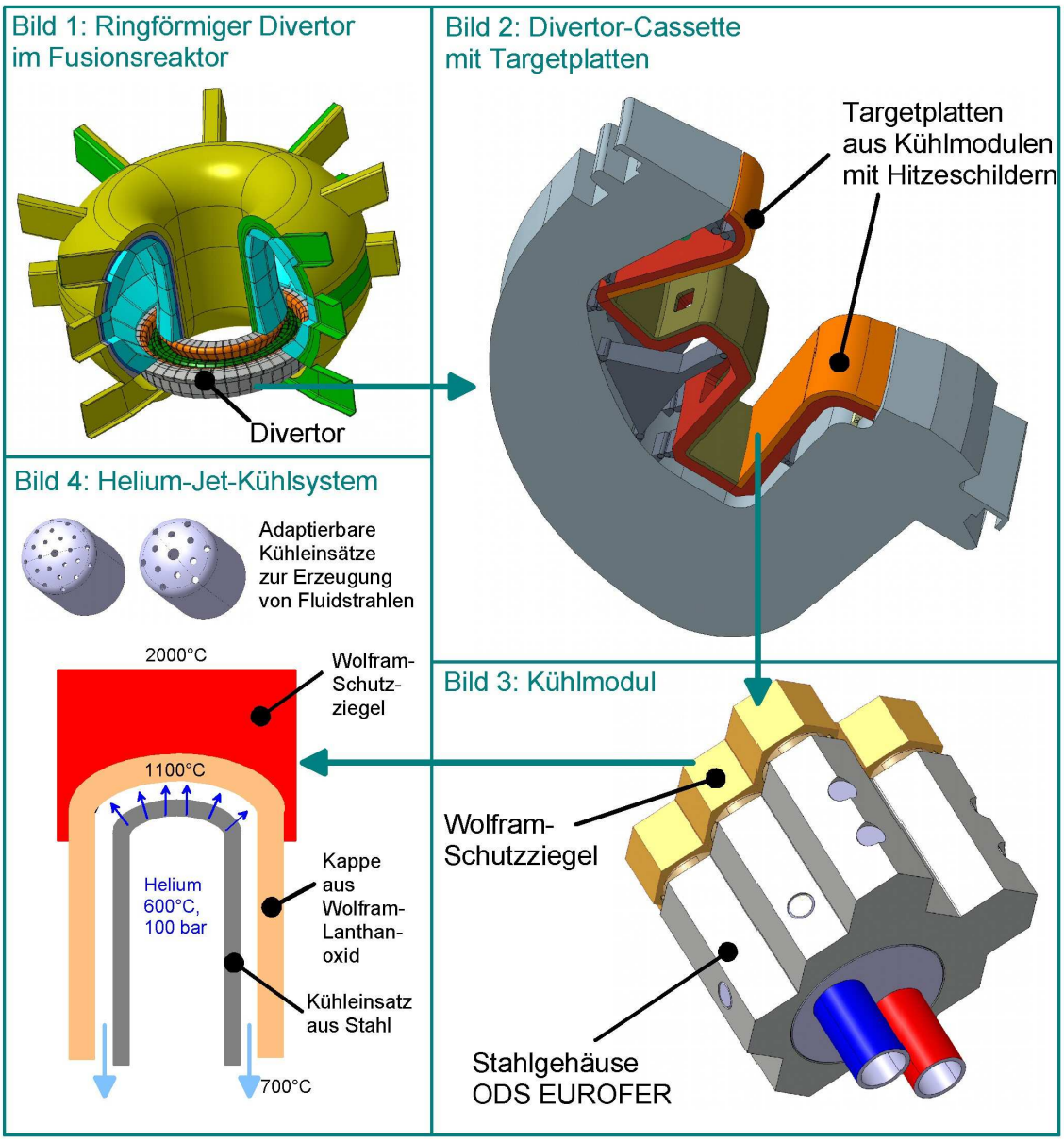


Figure 75: Physics elements of a divertor

verformen im Allgemeinen den Plasmaquerschnitt, wobei man eine stehende Ellipse wählt, um die MHD-Stabilität zu erhöhen.
Ein weiterer (wichtiger) Vorteil, vor allem für den Plasmaeinschluß, ist eine höhere Temperatur des Hauptplasmarandes, die durch die Verminderung der Verunreinigungen sowie weniger Recycling am Hauptplasmarand hervorgerufen wird. Die kleineren Temperaturgradienten im Hauptplasma sind sehr vorteilhaft für den Einschluss. Abb. 76 zeigt eine vorgeschlagenen Anordnung eines ringfoermigen Divertors in einem Fusionsreaktor.
Auch in einem Stellarator ist es möglich, durch Einstellen einer geeigneten Form des Magnetfeldes (in diesem Fall ohne Zusatzspulen), das Plasma weniger von den Limitern, sondern mehr durch eine magnetische Separatrix zu begrenzen. 1992 war somit im Wendelstein7-AS erstmals gelungen, die bei den Tokamaks verbesserten Einschlusseigenschaften auch in einem Stellarator zu beobachten.



Der ringförmige Divertor (Bild 1) besteht aus 48 Divertor Cassetten. Die Cassetten (Bild 2) tragen die Targetplatten, die aus Kühlmodulen aufgebaut sind. Die Kühlmodule (Bild 3) tragen 6eckige Wolfram-Schutzziegel, um einer extrem hohen Wärmelast und einem starken Teilchenbeschuss standzuhalten. Die Wolframziegel werden auf Kappen montiert und mit Helium-Jets gekühlt (Bild 4). Die Anpassung an unterschiedliche Wärmelasten erfolgt durch adaptierbare Kühleinsatze.

Figure 76:

4.7 Neue Entwicklungen

Der Divertor ist sehr wichtig für den verbesserten Einschluss und Stabilität, die man seit den 1980'er Jahren und vor allem seit 1990 erreicht hat. (bei magnetischeingeschlossenen Plasma). Es ist gelungen, die notwendigen Ionentemperaturen (mit Hilfe NBI) zu erreichen und sogar zu übertreffen! ($T_i > 30\,\mathrm{keV}$)
Wichtiger: die Einschlusseigenschaften des toroidalen Magnetsystem sind erheblich

Verbessert worden. Die notwendige Dichten und Einschlusszeiten konnten (einzeln) erreicht werden und die Plasmaenergie und Plasmadruck konnten soweit erhöht werden, das $Q_{DT} \gtrsim 1$ möglich ist.
In den 1980'er Jahren wurden empirisches Skalierungsgesetze (z.B. dass τ_E fast linear mit dem Plasmastrom steigt) entdeckt. Allerdings gibt es Instabilitäten, wenn I_p zu gross wird. Die Ergebnisse sind einigermassen reproduzierbar.

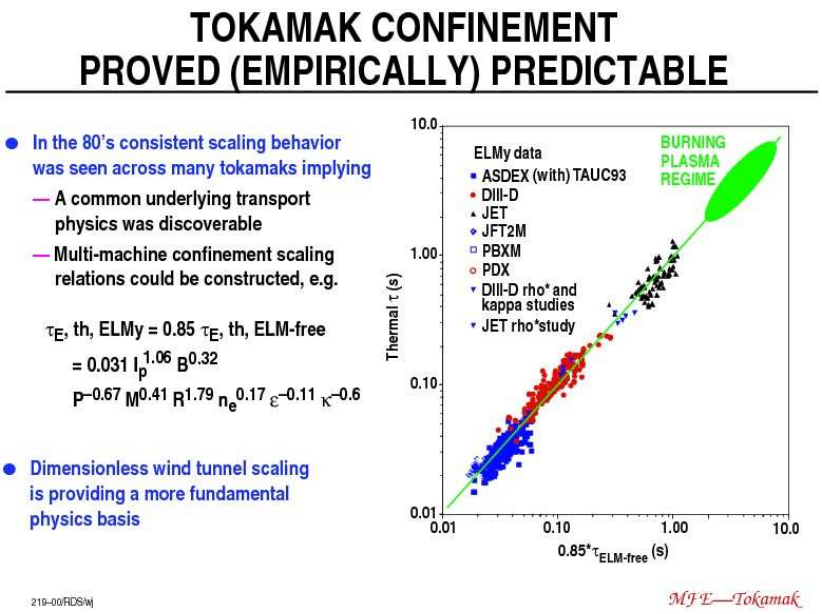


Figure 77: Scaling in tokamaks.

Dazu wurden 1-D Transport Codes entwickelt und eingesetzt. (ELM=Edge Localized Mode; mehr später)
Sehr wichtig war auch die Entdeckung der sog. H-Mode (High Confinement); der Einschluss wurde viel besser. Unter bestimmten Bedingungen (unter anderem P_{Heiz} >Schwelle und Vorhandensein eines Divertors) springt das Plasma in einen Zustand mit wesentlich besserem Einschluss um.
Bild: Bei der L-Mode ist $\tau_E \propto I_p/\sqrt{P_{Heiz}}$ (Abb. 78). Bei der H-Mode ist τ_E ein Faktor 2 grösser und fast unabhängig von P_{Heiz} sowie von treibenden Kräften (z.B. Impuls zufuhr durch NBI) abhängig (s. Abb. 78). Voraussetzung für den Übergang ist eine ausreichend hohe Elektronentemperatur von etwa 100 eV im Bereich der Separatrix. Der Divertorkonfiguration ermöglicht dies durch die Trennung des Separatrixbereichs von dem Bereich vor den Targetplatten mit kaltem Plasma.
Wichtig sind die elektromagnetischen Fluktuationen (s. Abb. 79), sowie sog. "Ausgleichsströme", die entlang der magnetischen Feldlinien (insbes. derjenigen mit rationalem Sicherheitsfaktor q, da diese nach einigen toroidalen Umläufen wieder in sich selbst treffen). Diese Ströme erzeugen Störungen in der Magnetfeldtopologie und führen zu einer Verschlechterung des Plasma-Einschlusses. Diese elektromagnetische Fluktuationen führen zu Turbulenzerscheinungen, die eine Art radiale Winkel (bzw "Jets") bilden und so Energie und Teilchen vom Plasma Zentrum zum Plasma Rand Transportieren.
Mit einem sogenannten verscherten Fluss kann man diese Turbulenzstrukturen zerstören

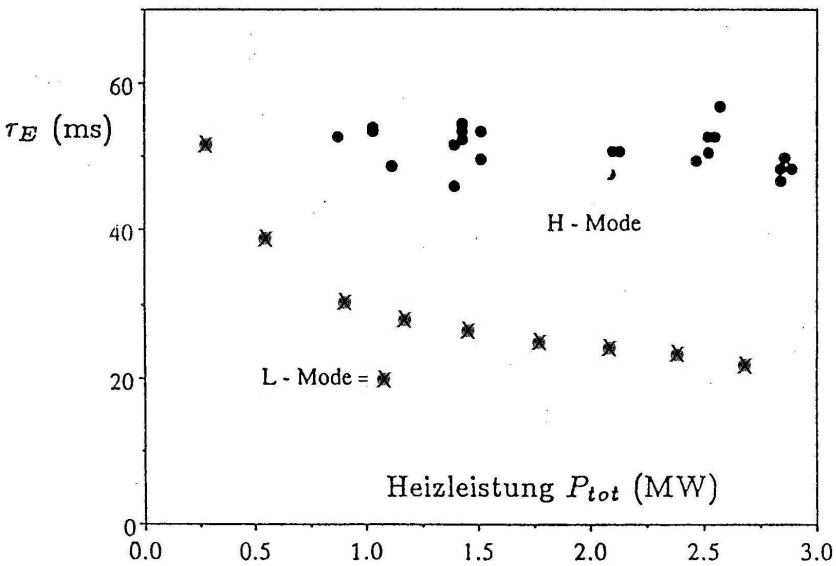


Figure 78: Increase in energy confinement time with transition to the high-confinement mode.

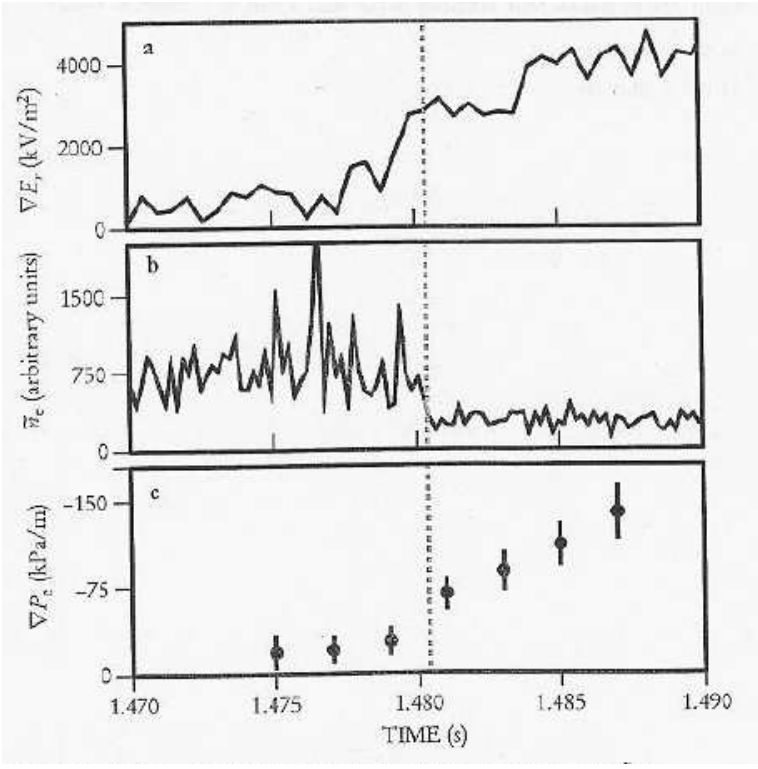


Figure 79: Transition to the high-confinement mode in a tokamak. As the H-mode sets in (vertical dotted line), (a) the radial gradient in the radial electric field increases suddenly in the transport barrier, implying a sheared flow. At the same time, the density fluctuations decrease (b) and the electron pressure gradient increases (c). Figure from "'New Physics in Fusion Plasma Confinement"' by R.D. Hazeltine and S.C. Prager, Physics Today, July 2002.

und so den Energie- und Teilchen-Einschluss verbessern. Dies führt zu einer Transportbarriere am Plasmarand.

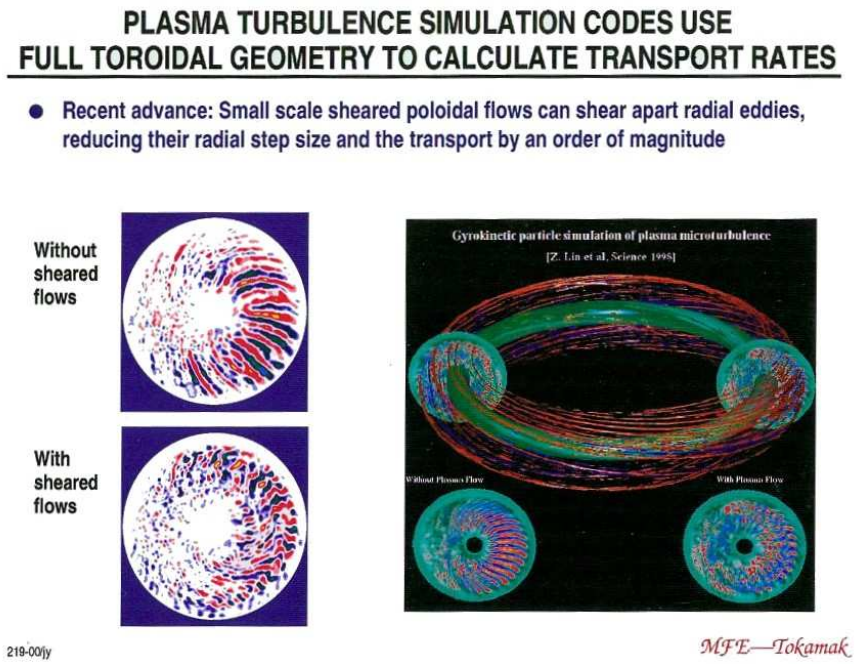


Figure 80: Suppression of turbulence with sheared poloidal flow.

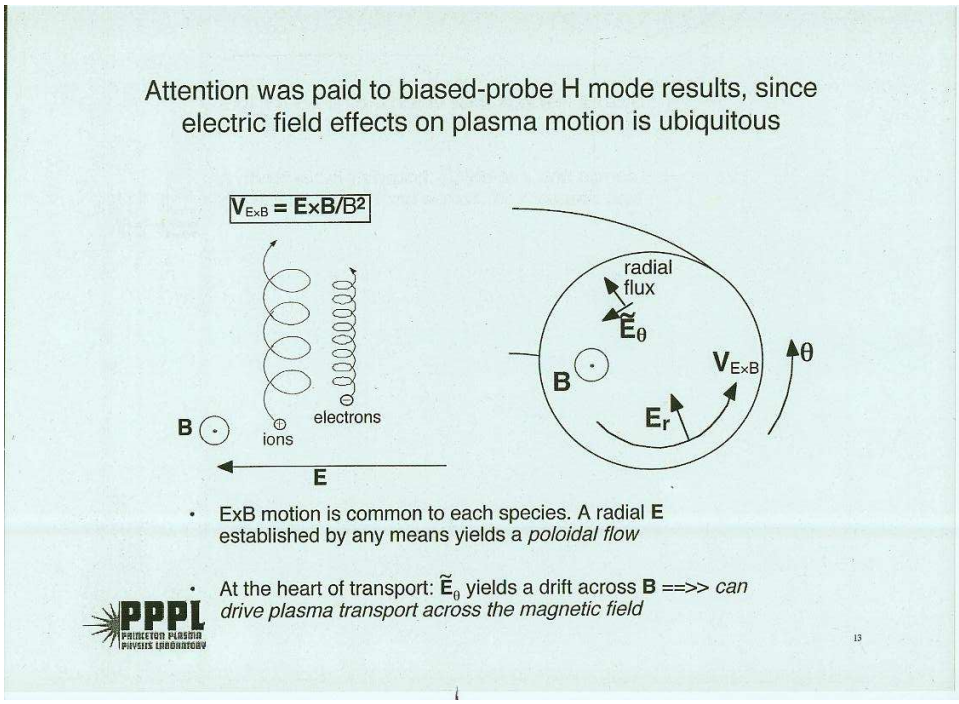


Figure 81: Poloidal flow induced by radial electric field.

Ohne Verscherung sind die (elektrostatischen) Äquipotentialflächen radial und sind auch in

einem grossen Bereich des Plasmas ausgedehnt. Damit gibt es ein poloidales E-Feld und somit ein $\vec{E} \times \vec{B}$-Drift nach aussen.
Man glaubte, dass toroidale und poloidale Rotationsprofile, die aufgrund von Impulszufuhr (NBI) oder Stromtreiben (LH in JET, ECCD in Asdex) oder durch die Turbulenz selbst hervorgerufen werden, können ein radiales E-Feld induzieren (in einem dünneren (einige cm Dick) Schicht, was die Turbulenzstrukturen aufbricht).

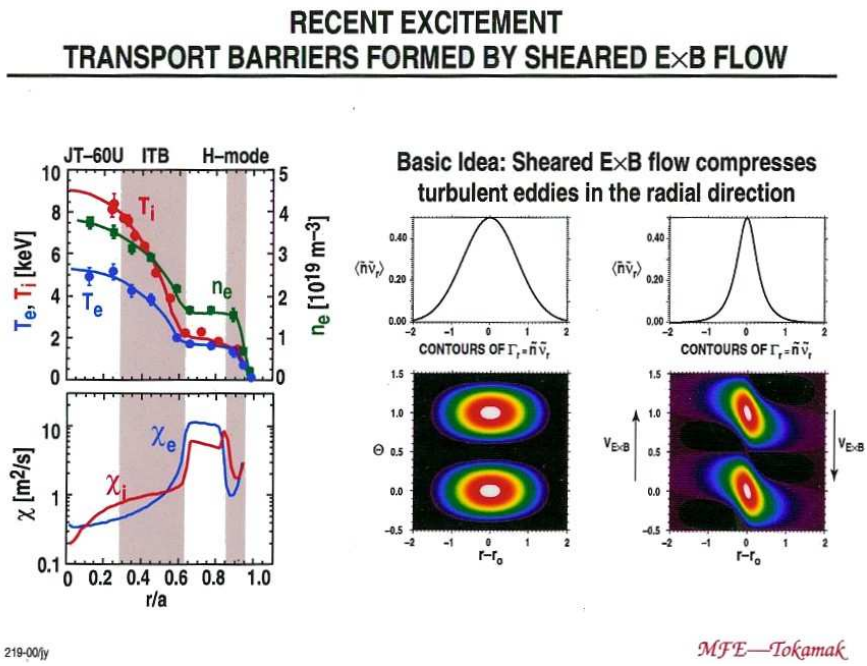


Figure 82: Formation of transport barrier with a sheared poloidal $\vec{E} \times \vec{B}$ flow.

Etwas später entdeckte man, dass man ähnliche Transportbarriere weiter in Richtung Zentrum auch induzieren kann (internes Transportbarriere oder ITB).
In a tokamak the current density is usually largest at the magnetic axis. In this case, q(r) rises from the center to the edge of the plasma. One can use noninductive current drive and/or the bootstrap current to manipulate the current density profile to have a maximum away from the center. In this case of *reverse shear*, the safety factor q has a minimum away from the center.
Dies passiert vor allem, wenn das Stromdichteprofil so manipuliert werden kann, dass die Turbulenzstruktur sich in einem Bereich mit $dq/dr \simeq 0$ (Reversed magnetic shear) abgebrochen werden; s. Fig. 83).
Wie wird dies gemacht?
JET: off-axis current drive with LH-heating during current ramp-up.
JAPAN: NBI (mostly)
Asdex: ECCD (mit einem 140 GHz gyrotron)
Merke: Wenn die Turbulenzstrukturen zerstört werden, und die Dichte Fluktuationen reduziert, werden die Gradienten (Dichte und Temperatur) steiler.
Man beobachtet: die Turbulenzerscheinungen, die den Plasmatransport bestimmen, hängen vom Plasmazustand ab. z.B. die Turbulenz der Ionen zeigt ein Schwellenverhalten, wobei die Turbulenz erst bei einem bestimmten Temperaturgradienten einsetzt, der wiederum von

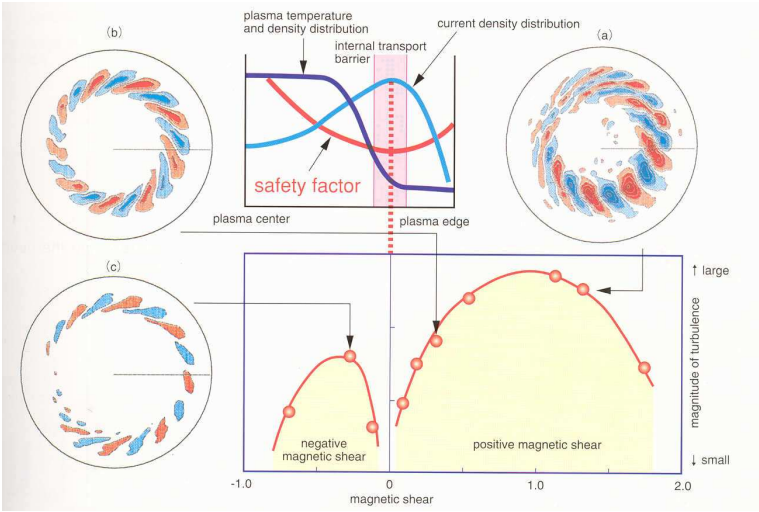


Figure 83: Plasma turbulence can extend over a large region of the plasma, reducing confinement. If the confining magnetic field has a particular structure known as negative shear a virtual confinemnt wall called an "internal transport barrier" (ITB) appears that prevents turbulence induced thermal flow out of the core. It is associates with sheared $(\vec{E} \times \vec{B})$ flow and can be induced by controlling the plasma current distribution such that it is hollow. There is then a region in which $dq/dr < 0$; this is the reason for the name negative shear. Near the region in which $dq/dr < 0$, turbulence structures are broken up and the growth rate of instabilities is reduced.

der Temperatur abhängt. Bei grösseren Temperaturgradienten wird der Einschluss wieder schlechter. Man kann dies teilweise umgehen, indem man eine möglichst hohe Temperaturen am Plasmarand erzielt. Diese hohe Temperatur am Rand stellt sich ein, wenn die Turbulenz in dem schon erwähnten schmalen Bereich innerhalb der Seperatrix durch ein radiales E-Feld und durch ein an dieser Stelle verschertes Magnetfeld stabilisiert wird. Das E-Feld entsteht als Ergebnis eines Druckgradients. Um die Turbulenz zu unterdrücken ist ein minimaler Druckgradient am Plasmarand erforderlich. Dies wird mit Zusatzheizung erzeugt. Aufwendige Computer-Simulationen wurden hierfür entwickelt. Somit kann man sogenannte "Advanced Tokamaks" entwickeln (deren Definition ist zeitabhängig).
Ausser der erhöhten Flexibilität im Stromdichteprofil und dem Ausnutzen von Transportbarrieren, um die Energieeinschlusszeit zu erhöhen, kann man ein Druckprofil erzeugen, welches zu einem hohen Anteil selbstgenerierten Stroms ("Bootstrap current") führt. Zusammen mit externem nicht induktiven Stromtrieb durch Plasmaheizsystem nötig, um das Stromdichteprofil zu manipuliern) könnte dies zu viel längeren Pulse, bzw. stationären Betrieb führen.

Bootstrap current
Verursacht durch Diffusion (nach aussen) von heissem Plasma aufgrund Stösse. Man betrachte 2 benachbarte Bananenbahnen (hier projeziert) auf die Poloidale Ebene. die Bewegung ist trotzdem im wesentlichen Toroidal.
Die überlagerung der Larmorbahnen in benachbartem Bananenbahnen $\Rightarrow$ diamagnetische

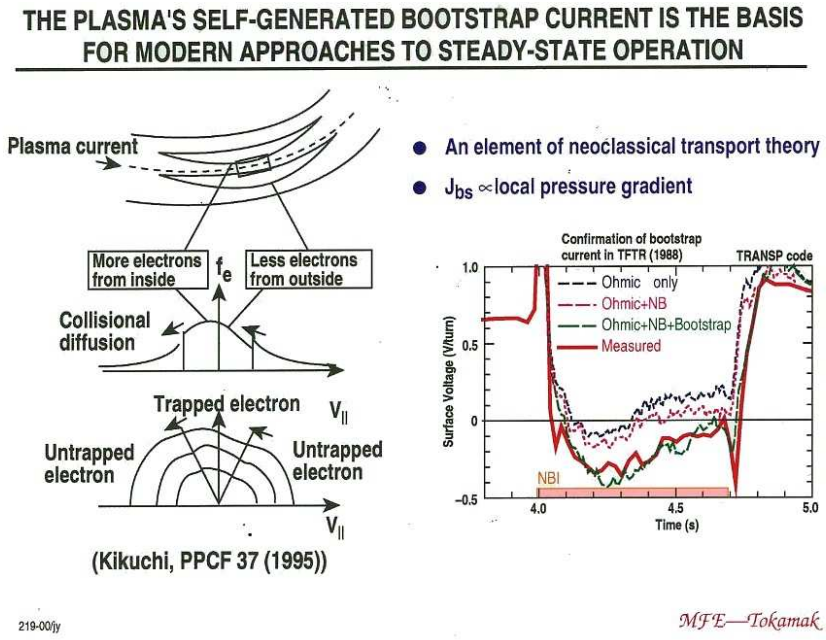


Figure 84:

Strom $\perp \vec{B}$ und $\perp \nabla p$; wenn die Dichte nicht homogen ist.

$$\vec{u}_\perp = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{k_B T}{nq} \frac{\vec{B} \times \nabla n}{B^2}$$

hier ist $\vec{H}_{||}$ klein und die "gefangene" Teilchen geben einen (fast) toroidalen Strom wenn ∇p (oder ∇n) radial ist.

Transportbarriere

Das Existenz von Transportbarrieren ist wichtig. Diese entstehen am Plasmarand bei dem Übergang zur H-Mode. Die oben beschriebene interne Transportbarriere (ITB) entstehen zusätzlich und bringen noch bessere Ergebnisse.

Die Einschlusszeit wird auch erhöht, wenn die Ionendichte in der Mitte das Plasma erhöht wird (z.B. mit Pellet injektion zum Plasma-Strom) und am Rande reduziert. Ausserdem sollen möglichst wenige Verunreinigungen in der Mitte vorhanden sein. Eine kleinere Randdichte bedeutet weniger Verluste. Auch werden einige Instabilitäten unterdrückt.

Aber wenn die interne Transportbarriere zu effektiv werden, werden α-Teilchen und sonstige Verunreinigungen auch eingeschlossen und können das Plasma nicht verlassen. Der verbesserte Einschluss wird nachgewiesen, in dem die Intensität der D_α-Linienstrahlung plötzlich sinkt.

Die Anhäufung von Verunreinigungen lässt sich reduzieren, indem man die Entwicklung von periodischen kleinen Instabilitäten am Plasmarand (Edge Localized Modes oder ELM's) erlaubt. Solange diese nicht zu gross sind, kontrollieren sie die Dichte der Verunreinigungen ohne dass der Einschluss zu sehr beeinträchtigt wird oder dass der Divertor zu stark belastet wird. Die Dichteprofil kann auch mit Hilfe von ECRH abgeflacht werden.

Ausserdem wird der Einschluss verbessert, wenn alles im Plasma-Gefäss mit niedrig Z Material (Be ode Bor) beschichtet wird. Es gibt weniger Verluste durch Linienstrahlung

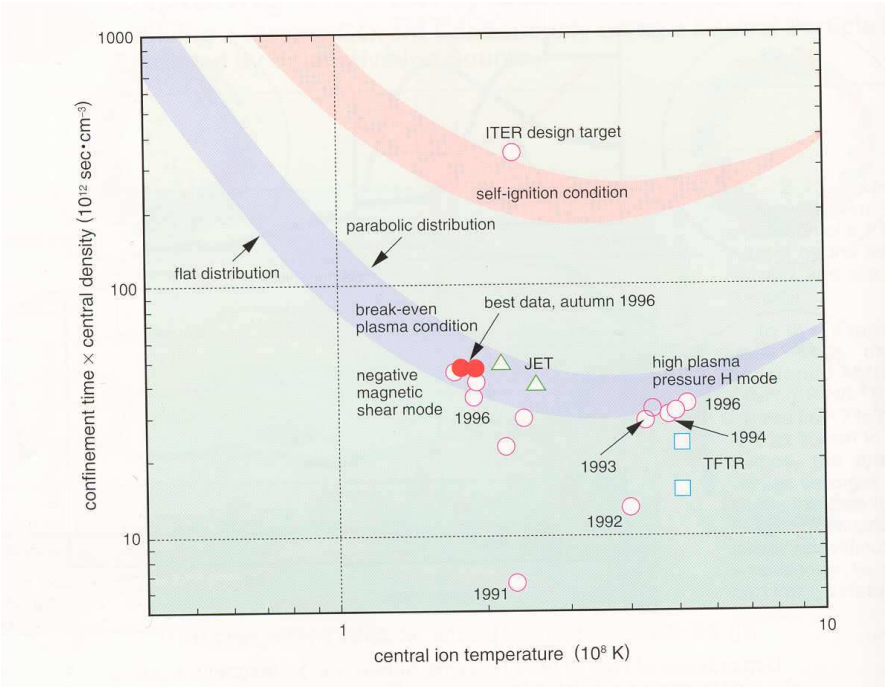


Figure 85: Im Jahr 1996 wurde $Q_{DT} \simeq 1,05$ mit einem DD-Plasma und einem Magnetfeld mit "'negative shear"' erreicht. Hier war $\tau_E \simeq 1\,\mathrm{s}$, $W_{plasma} \simeq 11\,\mathrm{MJ}$, $I_{plasma} \simeq 2{,}8\,\mathrm{MA}$, und Zusatzheizung $\simeq 17\,\mathrm{MW}$. Im Jahr wurde $Q_{DT} \simeq 1,25$ erreicht, mit Hilfe eines W-Förmigen gepumpten Divertor. Wie erwartet, wurde den höheren Wert von Q_{DT} auf Grund weniger Verunreinigungen erreicht.

(wichtig in der Mitte) und weniger Verdünnung (da weniger Verunreinigungen). Mit Be-Beschichtung hat JET Werte $n_D/n_e \simeq 0,9$ erreicht.
Die Divertorgeometrie hat einen starken Einfluss auf die Plasmaparameter im Divertor, und dabei auch auf dem ganzen Plasmarand. In Jaeri wurde ein besonderer W-Förmiger gepumpter Divertor eingesetzt, um die Verunreinigungen zu minimieren. Zusammen mit einem Magnetfeld mit "'reversed magnetic shear"', was zu einem ITB führt, konnte ein Plasma das $Q_{DT} > 1$ entspricht hergestellt werden (Abb. 85). Ähnliche Werte von Q_{DT} wurden auch bei JET erreicht.

Stabilität/Skalierung Kruskal-Shafranov Grenze
Wir haben gesehen, dass die Energieeinschlusszeit mit dem Plasmastrom steigt. Aber MHD-Instabilitäten begrenzen den Plasma Strom.
a) Kruskal Grenze

$$q(a) > 1(\text{oder } 2) \Rightarrow \frac{\mu I_p}{2\pi a} < \frac{aB_T}{R}$$

b) der Druck

$$p = \sum_j n_j(k_B T_j) = \frac{\beta B_T^2}{2\mu_o}$$

$\langle p \rangle$ (oder β) soll möglichst gross sein, da die Fusionsleitung $\propto n^2(k_B T)^2 \propto \beta^2 B_T^2/2\mu_0$
Aber das Plasma ist instabil, wenn $\beta \gtrsim$ einige %

Troyen hat eine weitere Grenze hergeleitet:

$$\beta(\%) \lesssim 3I(MA)/[a(m)B(T)]$$

(für ein rundes Plasma)
Die Troyon-Grenze konnte in Experimenten bei ASDEX, JET und TFTR bestätigt werden.
Wenn das Plasma asymmetrisch ist (z.B. bei einem elliptischen Plasma ist
$a_{eff} = \sqrt{a_1 a_2} > a_1$)
kann man diese Grenze etwas (β bis 7%-11%) erhöhen. Am D3D in San Diego (USA), das mit einem für höhere β günstigen elongierte Plasmaquerschnitt ($a_1 \neq a_2$) mit Dreieckigkeit ausgerüstet ist, wurden β-Werte im Berich von 7% bis 11% erreicht. Der Form des Plasmaquerschnitts wurde beim D3D-Tokamak bestimmt durch poloidalen Spulen und einem Divertor.
Die Stabilität wird auch bei grösseren Verhältnissen a/R verbessert.
Inzwischen definiert man.

$$\beta_{Tor} = \frac{\langle p \rangle}{B_T^2/2\mu_0}$$
$$\beta_{pol} = \frac{\langle p \rangle}{B_p^2/2\mu_0}$$
$$\beta_N = \frac{\beta_{tor}(\%)}{I(MA)/B_T(T)a(m)}$$

Wie gesagt, gilt $\beta_N < 3$ für ein rundes Plasma. Mit anderen Plasma Formen kann man dies etwas erhöhen.
Die Elongation des Plasmas wird mit Hilfe von Vertikalfeldspulen erreicht. Die Elongation erhöht die Plasmaquerschnittsfläche. Dann können grössere Ströme bei gleicher Stromdichte fliessen. Aber die Möglichkeit ist begrenzt. Vertikale Instabilitäten erlauben einen Faktor von maximal etwa 2.
Reissmoden
Hier handelt es sich um sog. "Neoclassical Tearing Modes" (NTM). Es bilden sich "magnetische Inseln" bei q rational. Dies führt zu einem Kurzschluss für Wärmetransport. Man kann dies mit ECCD entgegenwirken; s. Abb. 87.

4.7.1 Einfluss des Plasmarands

Obwohl der Einschluss besser ist mit einer (in der Mitte gespitzen Dichteverteilung, die in einem Reaktor entstehenden α-Teilchen (und auch sonstige Verunreinigungen) müssen entfernt werden. Es gibt Hinweise, dass schwache Instabilitäten (Edge Localized Modes, ELM's) nützlich sein können, um die Verunreinigungen aus der Mitte und zum Plasmarand zu transportieren. Es ist auch so, dass die Randeigenschaften den Einschluss in der Mitte beeinflussen. (Rand entspricht einer Schicht, ca. äussere 5-10% des Plasmaradius).
Man ist nun soweit mit der Heizleistung, dass die Energieflussdichte durch die Randschichten des Plasmas fast die erwarteten Grössenordung eines Reaktors erreicht. Hiermit kann man die Plasma Wand Wechselweirkung untersuche. Dies ist wichtig, weil es eine Schlüsselrolle spielt.
Die Betriebsparameter sind durch Instabilitäten begrenzt, vor allem bei höheren Dichten.

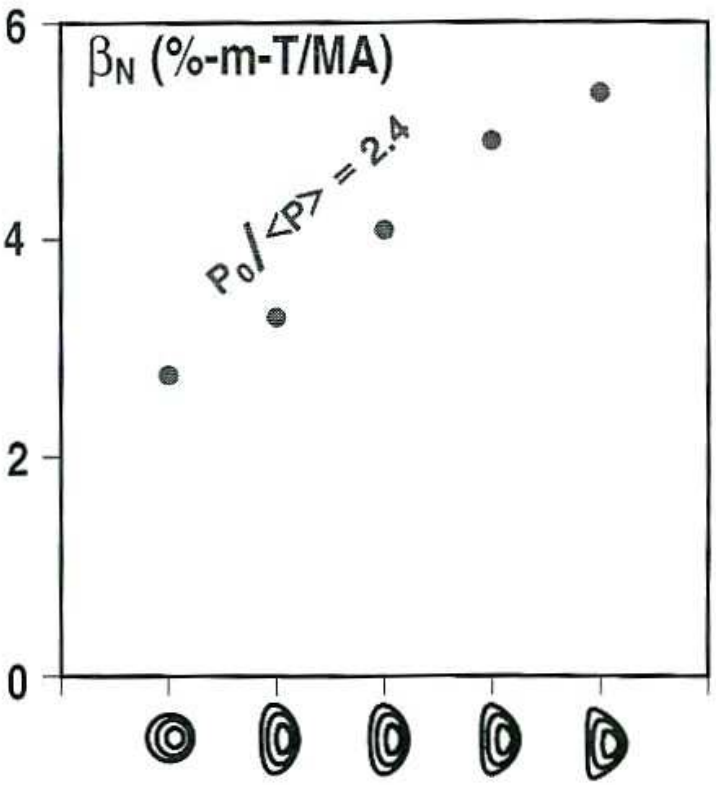


Figure 86: As plasma shaping is optimized, with broad pressure profiles and a hollow current profile to produce reverse magnetic shear, the so-called "'kink instability"' is suppressed and $\beta_N > 5$ is achievable.

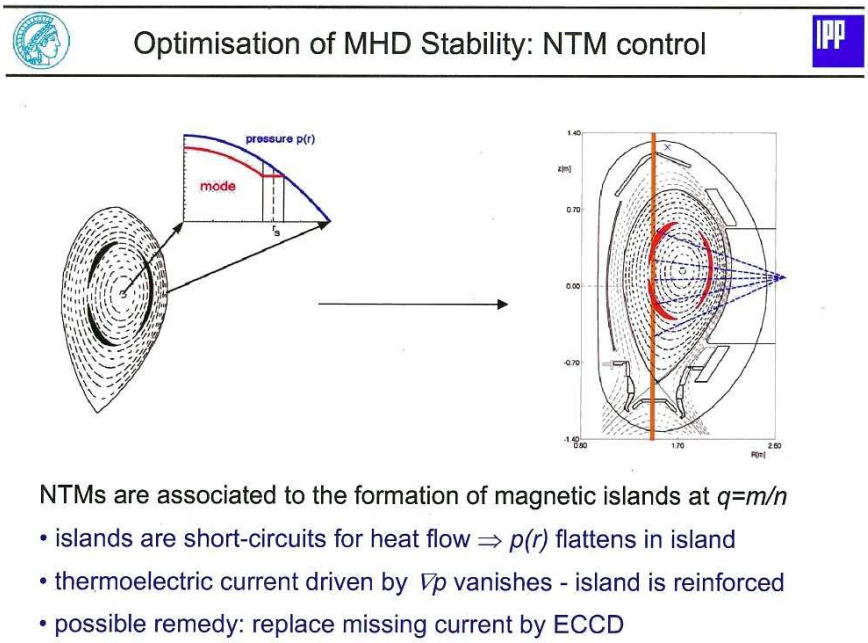


Figure 87: neoclassical tearing modes

Beispiel: wenn die Randtemperatur $[T(a-(2-3\ cm))]$ zu klein ist ($\lesssim 100\ eV$) ist das Randplasma kalt, was wiederum bedeutet, dass η_{el} zu gross wird. Die Energieverluste durch Strahlung werden auch höher, das Plasma kühlt weiter ab, die elektrische Stromdichte wird reduziert und MHD-Instabilitäten (verursacht durch Rekonnektion??) zerstören das Plasma. Andererseits soll die Randtemperatur nicht zu hoch sein (gewünscht: $T_e(a-2\ cm) \lesssim 300\ eV$) damit die ELM's die Verunreinigungen wegtransportieren können. Diese ELM's verschwinden, wenn $T_e \gtrsim 300\ eV$ am Rand. Aber bei Asdex gab es keine H-Mode, wenn $T_e(Rand) < 200\ eV$. Diese Sachen hängen u.A. von der Geometrie des Divertor ab. Die Übergangstemperatur wird etwas erhöht bei grösserem Magnetfeld und Plasmastrom. (aber T_{SOL} soll klein bleiben).
In einem Reaktor erwartet man, dass die Energieerzeugung ca. 1500 MW sein wird (oder mehr?). Ein grosser Teil dieser Energie wird in der Form von Fusionsneutronen grossflächig auf den Wänden des Gefässes abgeladen. Aber 15-20% dieser Leistung wird auf den Divertorplatten deponiert. Dies ist viel, weil die Platten nicht sehr gross sind (Leistungsdichte $\sim 10\ MW/m^2 \simeq 1\ kW/cm^2$) Wenn Teilchen auf die Platten prallen, wird Material abgetragen (bis einige cm/Jahr). Dies ist eigentlich zu viel.
Eine mögliche Hilfe haben neuere Experimente gezeigt. Damit die gesamte Energie nicht in Form schneller Plasma Teilchen auf die Divertor-Platten deponiert wird, werden in die Randschicht des Plasmas gezielt Verunreinigungen eingeblasen. (Bei Asdex war es Neon; genaueres war schwer zu finden). Bei JET war es Stickstoff; die Menge ist wieder nicht bekannt. Durch Wechselwirkung mit dem Plasma werden diese Atome angeregt und frangen an zu leuchten. So wird ein Teil der Energie in Form von UV- oder weicher Röntgenstrahlung aus dem Plasma entfernt (Radiative Divertor Plasma) erst seit Mitte der 1990's!

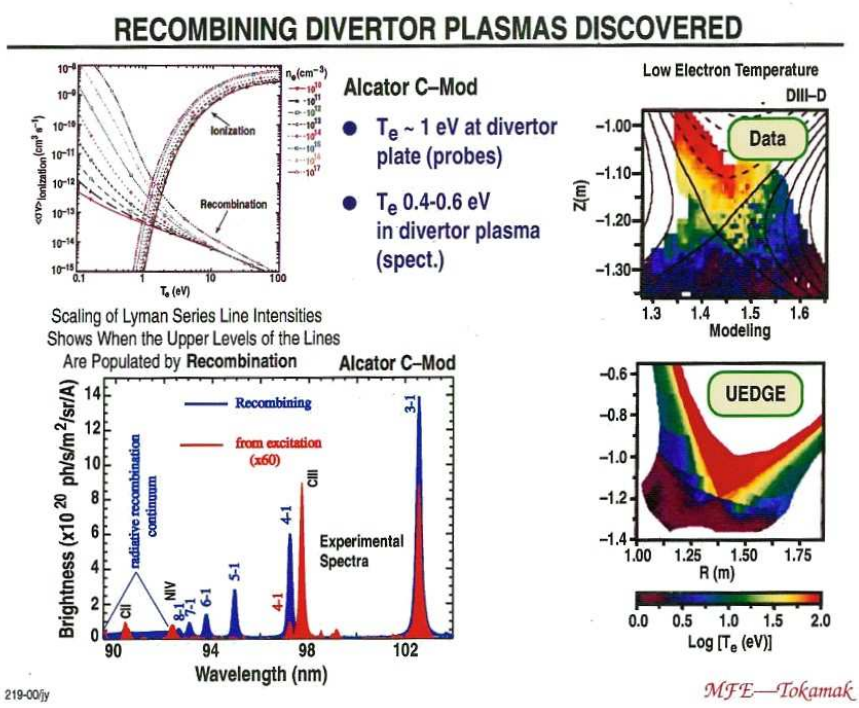


Figure 88: recombining divertor plasma

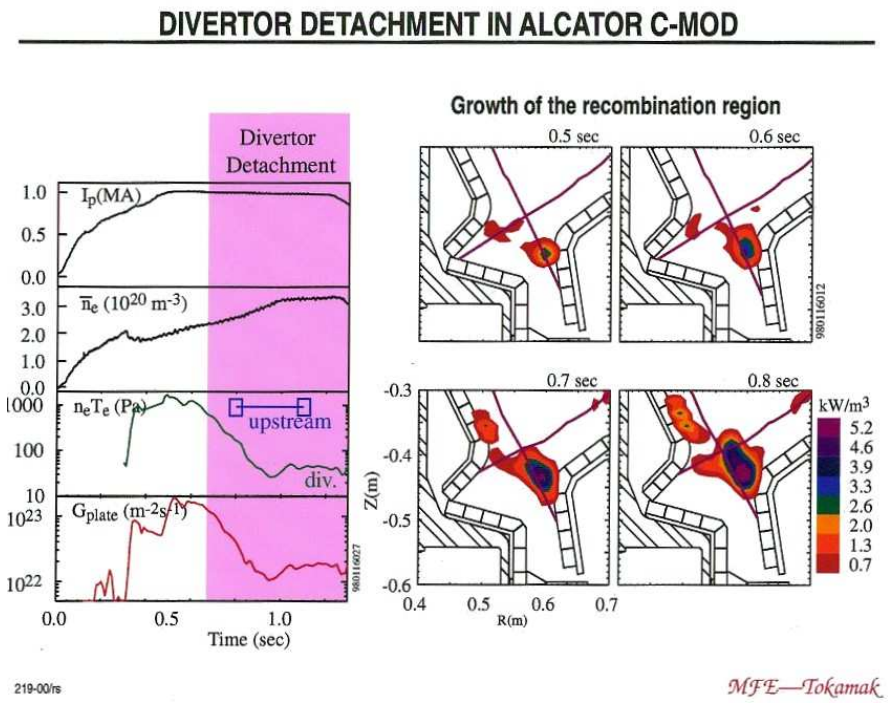


Figure 89: divertor detachment

Im Plasma Zentrum muss eine solche Abkühlung vermieden werden. Am Plasma Rand ist sie dagegen nützlich., Bevor die Plasmateilchen auf die Divertorplatten ankommen, haben sie einen (grossen) Teil ihrer Energie an den Neon- (bzw. Stickstoff oder ...)-Atomen abgegeben. In Asdex-U hat man auf dieser Art und Weise über 90% der Leistung, die als Heizung in das Plasma eingeführt wurden, in Lichtstrahlung umgewandelt und grossflächig verteilt auf die Gefäss-Wänden wieder aus dem Plasma geführt (z.B. 8 MW Heizleistung führten so zu einer nur geringfügigen Erhitzung der Divertorplatten).
Bei JET mit einer ähnlichen (Stickstoff, statt Neon) Anordnung, in einem sog. ELMy-H-Mode und $24MW$ Heizleistung fand man $T_{DIV} \lesssim 350°C$ für 2,5 sek.
Weil die heissen Plasmazonen "abgelöst" in sicherer Entfernung von den Divertorplatten liegen, wird dieser Zustand "CDH-Regime" (completely Detached High confinement) genannt. Die Wärme Isolation entspricht den günstigen Werten des H-Regimes.
Ein zusätzlicher Vorteil dieses Verfahren: In normalen H-Regime wirken kleine Rand-Instabilitäten des Plasmas (Edge Localized Mode = ELM) belastend für die Divertorplatten, weil sie Energie und Plasma Teilchen schlagartig und gebündelt auf die Platten werfen. Andererseits bewirken sie, dass Verunreinigungen aus dem Plasma entfernt werden. Man wünscht schwächerer aber häufigerer ELM's und erhält diese im CDH-Regime.
Nun hofft man, dass in allen Zukünftigen Experimenten so ein "Strahlende Randschicht" erreicht werden kann. Hinweise dafür gibt es aus JET, Asdex, Textor und W7AS (kleine Stellarator).
Zusätzlich soll man auch die Gestaltung der Divertorplatten optimieren (Beispiel - JAERI); Materialforschung ist für diesen Zweck auch notwendig.

4.7.2 Ergebnisse mit Stellaratoren

Vorteile : Kein Plasmastrom und deshalb keine Disruptions Dauerstrich Betrieb ist viel einfacher.
Bisherige Experimente in Garching bestätigen die Optimierungskriterien (es gibt auch ein Experiment in Japan, aber hier sind die technischen Grenzen der Magnetkonstruktion erreicht worden). Die Tabelle zeigt Parameter für das Experiment W7-AS, sowie für die geplante Maschine W7-X im Bau, in Greifswald).
W7-X wird mit JET in der Grösse Vergleichbar; man erwartet T bis 5 keV und $\beta_{max} \sim 4\%$.

	W7-AS	W7-X (geplant)
Grosser Radius $R(m)$	2,0	5,5
$\langle a \rangle_{mittel}\,(m)$	0,18	0,53
$B_{Tor}(max)T$	2,5	3
Heizleistung (MW)	6,1	(20)
ECRH	2,1	(10)
NBI	2,6	< 10
ICRH	0,5	<4
Plasma Volumen (m^3)	1	30
Pulsdauer (s)	≤ 3	> 30
Rot transf.	0,3-0,6	0.8 (Achse)

Erreicht in W7-AS mit kombiniertem ECRH-NBI:

$n_e(10^{20}m^{-3})$	≤ 3
$T_e(keV)$	2
$T_i(keV)$	0,43
$\beta(\%)$	1,7 (theoretische Maximum 2%)

Ein besonders wichtiges Ergebnis war der Nachweis, dass im Divertorbetrieb schon in Wendelstein7-AS nahezu stationäre Entladungen bei hoher Plasmadichte und grosser Heizleistung möglich sind. Der zugängliche Parameterbereich wurde erheblich erweitert. Ende Juli 2002 wurden die Experimente an Wendelstein7-AS abgeschlossen.

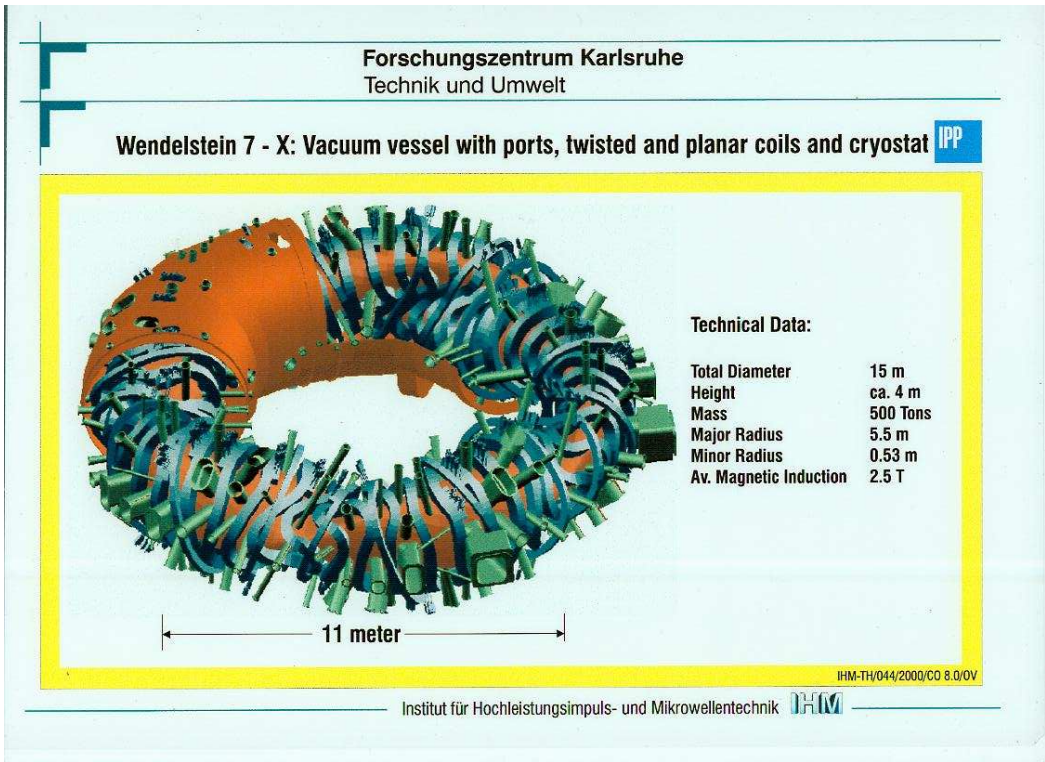


Figure 90: schematic of the W7X-stellarator

4.7.3 Experimente mit D-T Mischungen

Aus Strahlenschutzgründen wurden die meisten Experimente mit Wasserstoff oder Deuterium durchgeführt, und dann errechnet, wie viele Fusionsenergie mit einer 50-50% DT Mischung herraus kommen würde.
Die erste Ausnahme : 1991 bei JET.
Da wurde eine $D/T = 86\%/14\%$ Mischung benutzt. Ausserdem $n_D + n_T = 2.4 \times 10^{19} m^{-3}$ ($n_e \simeq 3,6 \times 10^{19} m^{-3}$), $Z_{eff} \simeq 2,4$, $\tau_e \simeq 0,9s$ $T_i(0) \simeq 2T_e(0)$ =18,8 keV, I_p =3,1 MA, B_T ≃2,8 T ein Tripelprodukt $(n_D + n_T)T_i\tau_E \simeq 4 \times 10^{20} m^{-3}\, keV m^{-3} s$ und eine Fusionsleistung von 1,7 MW. $\Gamma_{neutron,max} \simeq 6 \times 10^{17}$ n/s produziert (gemessen aus der Beute von $7,2 \times 10^{17}$ Neutronen mit 14 MeV Energie (entspricht $W_{fus} \sim 2$ MJ). Die Heizleistung Betrug 14,5 MW und die Entladungsdauer ca 2s.
Nach diesen Experimenten in Dezember wurden (ab folgendem Februar) umgebaut. Das Experiment wurde mit nur 14% Tritium durchgeführt, damit der Umbau nach den Weihnachtsferien stattfinden konnte.
2 Jahre später, kurz bevor das Experiment TFTR in Princeton stillgelegt wurde, hat man eine Experiementellen Reihe mit 50%/50% DT durchgeführt. Die Heizleistung betrug mehr als 40 MW mit $n_D + n_T \simeq 6,7 \times 10^{19} m^{-3}$ in der Mitte (es wurde viel mit NBI, H_3^+ Ionen gemacht), Hier wurde eine Fusionsleistung von 10,7 MW erreicht.
Andere Parameter : $\tau_E \simeq$ 0,18 s, $T_i \simeq$ 36 keV, $Te(0) =$ 13 keV, $I_p \simeq$ 2,7 MA, $B =$ 5,5 T, Tripelprodukt $\simeq$ $4,4 \times 10^{20} m^{-3}$ keV s, $Q \simeq 0,27$, Entladungsdauer≃ 0,2 s.

Dann in 1997/98 hat JET wieder mit Tritium experimentiert. Diesmal mit $n_D/n_T = 50\%/50\%$.
a) Rekord Leistung (Shot 42976 ($16MW$) Abb. 91)
I_p=4,2 MA, B=3,8 T, $P_{fus}/P_{in} \sim 0,6$, T_i >20 keV, T_e bis 10 keV, $P_{fus} = 16{,}1$ MW.

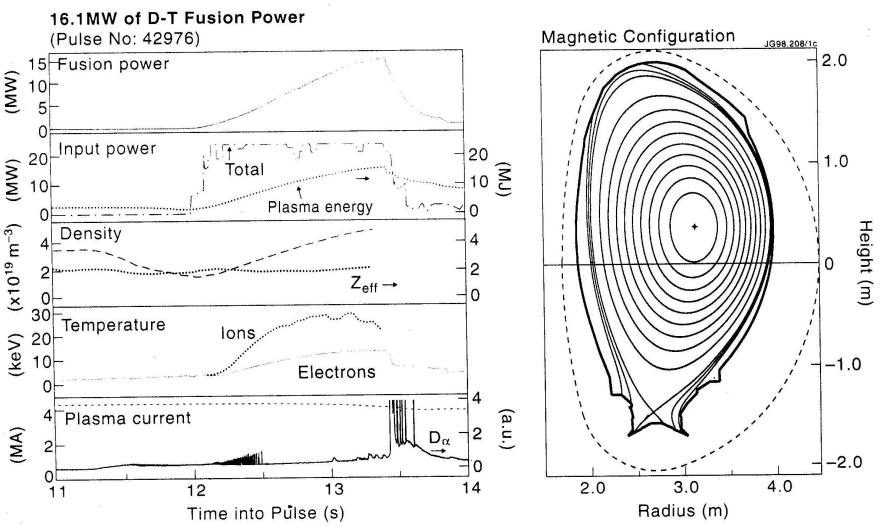


Figure 91: High power experiment at 4.2 MA ant 3.8 T (pulse No.42976) showing world record fusion power produced of 16 MW.

b) Rekord $W_{Fus} = 21,7MJ$ (Shot 42982, in 1998; Abb. 92)
I_p =3,8 MA, $B \sim 3{,}8$ T, P_{in}= 24 MW, $T_i = T_e \sim 8$ keV, $Q \sim 0,2$ für 5 sec. Hier hat man NBI mit Tritium zur Heizung benutzt, um eine höhere effektive Ionentemperatur zu erreichen. Dabei wurden eine hohe Fusionsleistung und Q geopfert, um eine höhere τ_E und höhere W_{fus} zu erreichen.

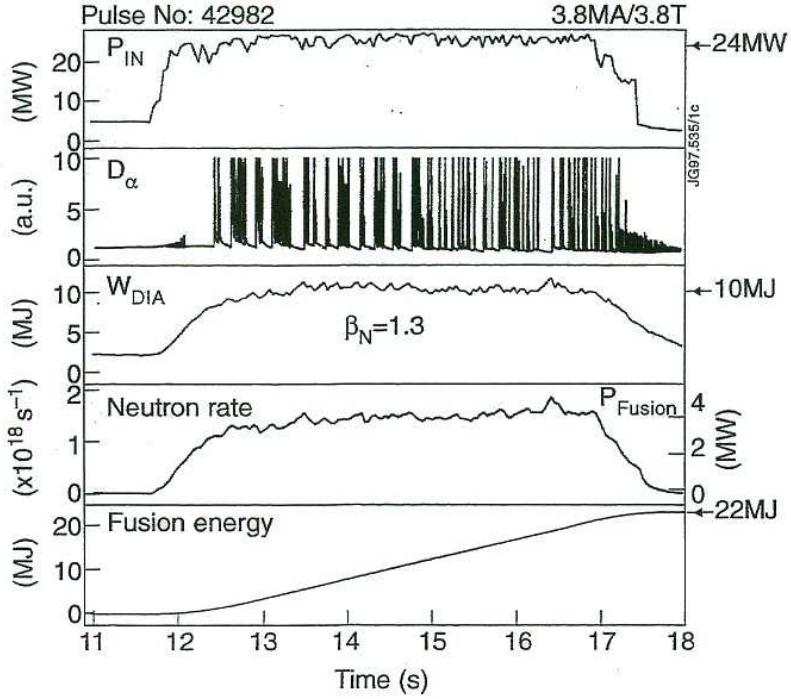


Figure 92: High power experiment at 3.8 MA ant 3.8 T (pulse No. 42982) showing world record fusion energy produced of 21.7 MJ.

c) shot 42676 (Sept. 1997)
I_p=3,6 MA, B_T= 3,4 T, P_{NB}= 18,7 MW, P_{ICRH}= 3,6 MW, $n_e(0) = 3,8 \times 10^{19} m^{-3}$, $n_D(0) + n_T(0) \sim 3,0 \times 10^{19} m^{-3}$, $Z_{eff} = 2,1$, $T_i(0)$= 23 keV, $T_e(0)$= 14 keV, $\tau_e \sim$ 0,9 s; $P_{fus} \sim$ 12,9 MW ($\pm$10%), $W_{Fus} \sim$ 12,5 MJ ($\pm$10%), $(n_D + n_T)T_i\tau_E \sim 6 \times 10^{20} m^{-3}$ keV s (in der Plasma Mitte).

4.8 Weitere Probleme

Thermomechanische Probleme in der ersten Wand und vor allem im Divertor
Strahlungsschäden, Aktivierung des Strukturmaterials, usw.
Zuerst Bilder mit den Hauptkomponenten eines möglichen Fusionsreaktors.

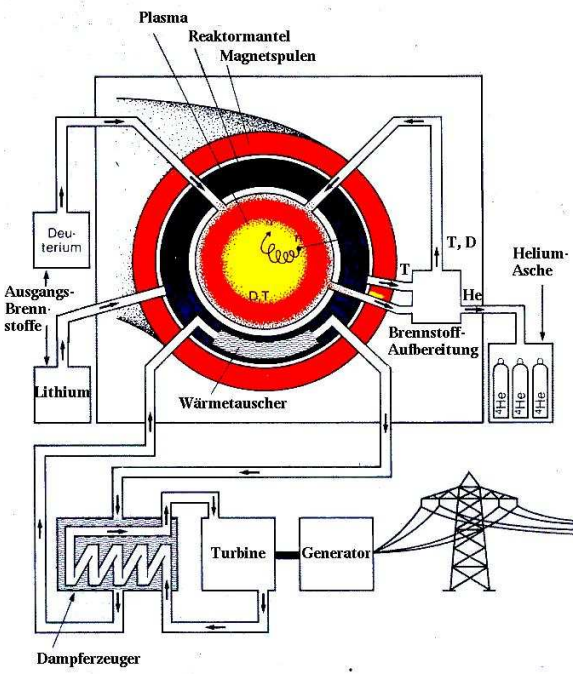


Figure 93: Schematische Darstellung der gundsätzlichen Funktionsweise eines stromliefernden DT-Fusionsreaktors. Der obere Teil des Bildes zeigt einen Schnitt durch die ringförmige Anordnug, in deren Innerem das heiße DT Fusionsplasma eingeschlossen ist.

Zwischen den Magnetspulen und dem Plasma stehen eine erste Gefäßwand, ein (Brut)Mantel und weitere Abschirmung.
Die 1.Wand hält Vakuum für das Plasma. Im Plasma sollen die Fusionreaktionen stattfinden. Die geladenen Teilchen bleiben im Plasma, die ungeladenen Neutronen knallen auf die Wand. Ca. 80% davon gehen direkt durch und werden erst im Mantel (Blanket) gestoppt.

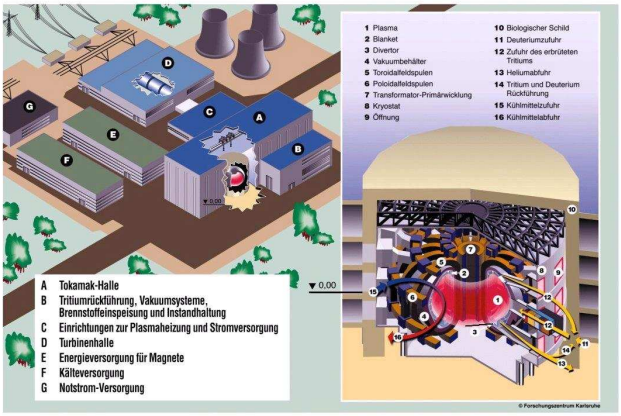


Figure 94: Kraftwerk

Anzumerken: Der Neutronfluss an der ersten Wand beträgt ca. 3 MW/m^2 in einer Reaktion. Die Lebensdauer der Stoffe für die erste Wand, sowie sie durch Neutronen

aktiviert werden, ist wichtig. SiC wäre attraktiv, weil die Aktivierungsprodukte alle kurzlebig sind. Aber es kann keine Disruption vertragen. Zuerst wird der Stahl (mit besonderen Legierungselementen) benutzt, ggf mit Bor oder Beryllium beschichtet.
Im Blanket finden die Brutreaktionen
n+ ^{6}Li $\rightarrow$ ^{4}He +T, n + ^{7}Li $\rightarrow$ ^{4}He +T +n statt.
Auch geben die Neutronen ihre Energie in Form von Wärme ab, die über konventionelle Wärmetauscher an Turbinen zwecks Stromerzeugung abgeführt wird.
Vom Standpunkt der Bruteffizienz wäre flüssiges Lithium als Blanket-Mantel sehr geeignet. Aber die Gefahr einer chemischen Explosion bei Kontakt mit Wasser ist groß. Deshalb werden Alternativen untersucht. Eines ist, etwa wie flüssiges Lithium-Blei: $Li_{17}Pb_{83}$ (oder ähnlich). Eine andere ist Lithiumhaltige Keramiken (Li_2O oder Li_2ZrO_3 oder Li_4SiO_4). Alle Alternativen haben Probleme und mindestens zwei davon werden in ITER erprobt. FZK arbeitet auf die Entwicklung einer diesen Alternativen (Helium-gekülten Feststoffblanket mit Li_4SiO_4). Auch werden an Untersuchungen zu einem Flüssigmetall-Blanket (Helium-gekültes Lithium-Blei) gearbeitet.
Weitere Abschirmung sorgt dafür, dass die Magnete keine Strahlungsschäden erleiden und dass keine Strahlung in die Umwelt gelangt.
Das Helium (und Verunreinigungen, die vom der ersten Wand beim Aufschlagen von Plasmateilchen freigesetzt werden) wird abgepumpt ("Asche") – meistens in der Divertornähe. Mitgepumpt wird Brennstoff; dies muss getrennt werden und passend "entsorgt" oder wieder in den Brennstoffkreislauf gebracht werden. Die 14-MeV Neutronen tragen ca. 80% der Fusionsleistung, fliegen meistens durch die erste Wand und werden im Blanket absorbiert. Neben Tritum brüten und Energie für Stromerzeugung abgeben, aktivieren sie das Struckturmaterial. Beim Durchdringen der ersten Wand stoßen sie mit Gitteratomen des Materials. Die Gitteratome werden von ihren Plätzen verlagert und hinterlassen Leerstellen. Man kann abschätzen, wie oft ein Atom verlagert wird in einem Jahr (für jede MW/m^2 Belastung). 1MW/m^2 Belastung entspricht ca.
$4 \cdot 10^{17}$ Neutronen/$m^2 s$ (oder $3,46 \cdot 10^{22}$ Neutronen/(m^2 Tag)) (1 Tag = 86400 s).
Im Edelstahl wird jedes Atom 10-20 mal verlagert (in einem Jahr). Da die verlagerten Atome im Material bleiben, und die meisten Leerstellen nachgefüllt werden, geht das Material nicht sofort Kaputt, aber es ist offensichtlich, dass man mit Schwierigkeiten rechnen kann. Ein Maß für die Schädigung ist der Displacement per Atom (dpa).
1dpa $\Rightarrow$ jedes Gitteratom im Material wird einmal verlagert. Dies wird bei einer Bestrahlung mit ca. 10^{21} Neutronen/m^2 verursacht. Bei einer Belastung von 1MW/m^2 entspricht dies etwa 0,035 dpa/Tag (oder 10 dpa/Jahr). Bei einem Reaktor erwartet man das dreifache.
Dazu kommt die Tatsache, dass durch Transmutation neue Elemente entstehen. Die 14-MeV Neutronen manchen inelastische Stöße mit Gitteratomen (Kernanregung gefolgt von Emission von γ, p, n, α, ^3He usw). Was übrig bleibt ist oft radioaktiv. Wasserstoff und (vor allem) Helium, der so produziert wird, führt zu Materialversprödung. Die sonstigen Produkte ändern die chemische Zusammensetzung des Wand- (und Blanket) Materials und dadurch auch die Materialeigenschaften.
Mit den zu erwarteten Neutronenflüssen sind die sog. Sequentielle Reaktionen (Stoß eines Atoms mit dem Produkt eines vorherigen Stoßes $n + Fe \rightarrow x + Y$, dann $x + Fe \rightarrow$??) auch zu erwarten.
Bei der Wechselwirkung des Plasmas mit der ersten Wand gibt es auch Oberflächeneffekte

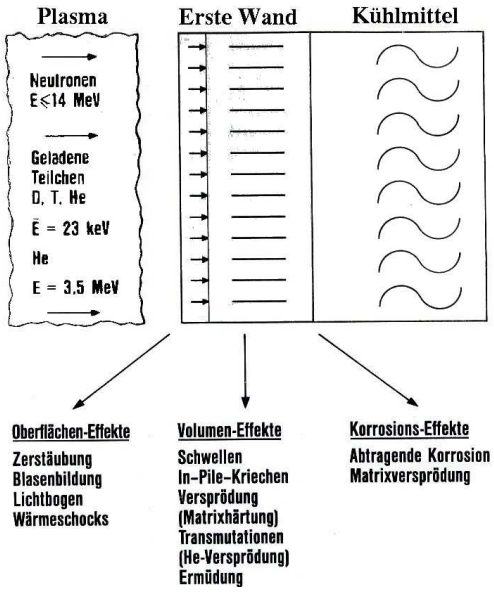


Figure 95: Belastung der ersten Wand

(und die Wand muss gekühlt werden, Korrosion ist wahrscheinlich).

Volumeneffekte:
Ausser den schon behandelten Effekten (Verlagerung der Gitter-Atomen, Aktivierung) kommt hinzu, dass obwohl 99% der entstandenen Leerstellen wieder gefüllt werden, 1% davon bleiben in Zwischengitterplätzen. Dies verursacht eine Schwellung des Materials durch Vereinigung von Leerstellen zu Hohlräumen. Volumenzunahmen von einigen Prozent pro Jahr sind möglich. Die mechanische Eigenschaften werden dadurch geändert (Schwellung, Versprödung, Matrixhärtung). Heliumproduktion im Wandmaterial durch Kernreaktionen führt auch zu Versprödung.

Oberflächeneffekte:

1. Zerstäubung: Aus dem Plasma entweichender Wasserstoff- und He-Ionen schlagen Atome aus der Wand und bewirken somit Wanderosion (bis mehrere mm/Jahr Materialverlust).
2. Blasenbildung: α-Teilchen werden abgebremst durch Stöße mit den Wandatomen. Sie bleiben dann als He Gas im Material. Gasbläschen können entstehen, die die Oberfläche zum aufplatzen bringen.
3. Lichtbogenentladung: Auf der Materialoberfläche bildet sich im kleinen Bereich (Durchmesser einige Mikrometer) hochdichten Plasmas, was als Kathodenfleck fungiert. Das Plasma wirkt als Anode. Bei einer Lichtbogenentladung fließz ein Strom, der die Wandoberfläche schmelzen kann. Es entstehen Krater.
4. Wärmeschock: Bei einer Störung im Plasma kann es zu Wandberührung kommen und an solchen Stellen kann auch eine Verdampfung der Oberfläche statt finden.

Typische Belastungen sind in einem Bereich von MW/m^2, was ca. 10^{18} Neutronen/$m^2 s$ entsprecht.

Abgelöste Materie führt zu Verunreinigung des Plasmas. Ein Divertor hilft, diese wieder aus dem Plasma zu entfernen.
Blanket-Struktur, wie gekühlt usw. wird noch studiert. Mehrere Konzepte sind in Gespräch (noch mal): Flüssiges Li hat Vorteile als Brutmaterial, Neutronen-Moderator, aber ist chemisch gefährlich aktiv. Auch ist die Trennung Li-T schwer und MHD in Flüssigmetall $\rightarrow$ hohe Pump-Widerstand.
Li-Blei Legierungen und Li- enthaltende Keramik werden auch untersucht. Experimente am ITER sind vorgesehen.
Tritium-Entfernung aus dem Blanket ist nicht einfach. Es soll schnell erfolgen, damit möglichst wenig Tritium im Blanket bleibt.
Ermüdung: der gepulste Betrieb eines Tokamak-Fusionsreaktors erzeugt Wärmespannungen (Betriebstemp. der Wand während eines Pulses um 500 °C, die zwischen Pulsen viel weniger). Diese periodisch mechanische und thermische Belastung führt auch ohne Strahlungsschäden zu einer Ermüdung des Materials.
Leider kann man dies alles nicht sehr genau experimentell untersuchen, da keine ausreichend starke Quelle für 14-MeV Neutronen zur Verfügung steht. Daraus dergeben sich große Unsicherheiten über die Schadensausbildung in Form von Einzeldefekten, Defektkaskaden und die zunehmende Tendenz zu inelastischen Wechselwirkung zwischen Neutronen und Gitteratomen.
Fuel Recycling:
Die Leckage des Brennstoffes beträgt $\simeq$ (10-20) mal der Verbrennungsrate. Etwa 10 mal mehr D+T wird mit α-Teilchen und Verunreinigungen abgepumpt als verbrannt. Recycling ist unentbehrlich (<u>auch</u> um das Tritium einzuhalten). Man muss mit Raten von 10^6 liter/s bei 10^{-8} Atm auspumpen können. Spezielle Kryopumpen erscheinen vielversprechend (diese wurden am FZK entwickelt, das Projekt ist nun abgeschlossen).
Wenn der "Auspuff" von Verunreinigungen gesäubert ist, muss man den unverbrannten D+T trennen und in den richtigen Proportionen in das Plasma wieder injizieren. Wahrscheinlich mittels Kryodistillation und Pellet injektion.
Tritiuminventar: Einige Kilogramm Tritium entspricht einer Aktivität von $\simeq 10^8$ Ci ($1\,\mathrm{Ci} \sim 3,65 \cdot 10^{10}$ Bq). Maximal 1 Ci/Tag darf aus dem Reaktor in die Umgebung gelangen! Deswegen ist geplant, an <u>jedem</u> Punkt 2-3 Barrieren zu haben, um Tritium- Einschluss zu gewährleisten (auch das Tritium-Inventar ist so klein wie möglich zu halten). Jedes Strukturelement (Rohr oder Container) wird doppelwandig sein. Tritium-Rückhaltung wird erschwert durch die Tendenz, aller Wasserstoff-Isotope bei hohen Temperaturen durch Metallwände zu diffundieren. Außerdem gibt es weitere Abschirmung um Reaktorhalle, Trennungsanlage, usw. und ein zusätzliches T-Reinigungssystem. Sonstige Radioaktivität ist auch vorhanden (Wand und Brutmaterial) und ist dort eingesperrt. Der Umgang damit hängt von dem verwendeten Material ab.
Die Tabelle zeigt typische Belastungen, die bei ITER zu erwarten sind.
(Angenommen: 20000 Pulse bei Pulslängen im Bereich 200-1500 sek.)

	1.Wand	Divertor
Wärmebelastung (MW/m^2)	$\sim$ 0,5	$\sim$ 10-15
Neutronen (MW/m^2)	bis 3	0,6
Defektrate (dpa/sec)	$3 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$
Max. Zahl der Verlagerungen (dpa/Lebensdauer)	4	2,5
Integrale Wandbel.(MW-Jahr/m^2)	0,25	0,15
Abtragung/Jahr	einige mm	einige cm!

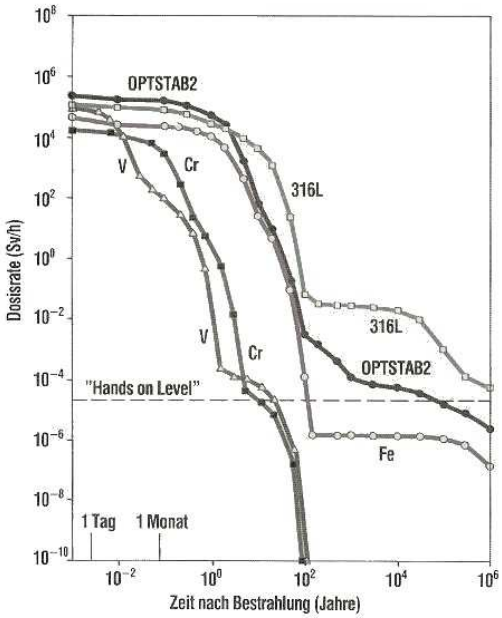


Figure 96: Abklingkurven nach 2,5-jähriger Bestrahlungszeit (MWa/m^2) in einem typischen Neutronenspektrum eines Fusionsreaktors. (OPTSTAB2 ist ein auf neidrige Aktivierung optimierter austenitischer Stahl; "Hands-on level" ist die Freigrenze der erlaubten Dosisrate, von der an man ohne direkte Schutzmaßnahmen mit dem Werkstoff umgehen kann.)

Bei einem Plasmaabriss kommt für eine kurze Zeit (10-50 ms) noch ein guter Faktor 10 mehr Belastung hinzu, Metall hält dies nicht aus. Die suche nach geeigneten Materialien ist noch nicht abgeschlossen. Man braucht: Hitzebeständigkeit, ohne Zerstäubung ("Sputtering") und am Besten auch mit nur kurzlebigen Aktivierungsprodukten.
Beim Divertor ist die thermische und mechanische Belastung + Zerstäubung das Hauptproblem. Die Schäden durch die Neutronenbelastung sind weniger als in der ersten Wand.
Am Ende beleibt auch aktiviertes Strukturmaterial. Wohin damit?
Man versucht, Legierungen mit einer niedrigen Aktivierbarkeit und/oder schnellen Abklingcharakteristik zu wählen. Alles soll weniger gefährlich sein, wenn Stahl <u>ohne</u> Nickel oder Molybdän benutzt wird. Man hofft, spezielle Stahllegierungen und/oder Keramik zu finden, die nach einige 100 Jahre ausreichend zerfallen.
Die Herstellung und Verarbeitung muss auch berücksichtigt werden, sowie das Ermüdungsverhalten.

Die biologische Gefährlichkeit ist weniger als bei Spaltreaktoren, da das zu aktivierenden Materie eher Stahl und leichtere Elemente sind (β, γ,-Strahlung, statt α-Strahlung).
Am Anfang ist die Aktivität vergleichbar mit Spaltreaktoren, allerdings wird alles nach einigen 100 Jahren nicht mehr sehr gefährlich.
Die Wartung der Behälter und Divertor wird auf jeden Fall sehr teuer sein
(Wirtschaftlichkeit des Ganzen, angenommen es funktioniert laenger und zuverlaessiger als ein Laborversuch!)

Übungen

1. Berechnen Sie aus der Erhaltung von Energie und Impuls die kinetische Energie des α-Teilchens und des Neutrons für die Reaktion

$$d + t \rightarrow \alpha + n + 17.6\, MeV$$

(im Schwerpunktsystem von d + t)

2. Ein Plasma hat eine zentralen Ionentemperatur $kT_i = 20$ keV und Elektronentemperatur $kT_e = 8$ keV, jeweils der Dichte $10^{20}\ m^{-3}$.

a) Berechnen Sie den Plasmadruck $nk(T_i + T_e)$.
b) Wie gross ist die Gesamtenergie, die in dem Plasma gespeichert ist, wenn das Plasmavolumen 1000 m^3 beträgt? Vergleichen Sie diese mit der Energie, die zur Verdampfung von 1 liter Wasser benötigt wird. Anfangstemperatur des Wassers ca 20°C)
c) Berechnen Sie den magnetischen Druck, der einem Magnetfeld von 1 T entspricht. (magnetischer Druck = $B^2/2\mu_0$)
d) Um ein Fusionsplasma einzuschliessen, soll $\beta = 2\mu_0 < p > /B^2 \leq 0.1$ sein. Wie gross muss das Magnetfeld sein, um diese Bedingung für die obigen Parameter zu erfüllen?

3. Das Lawson'sche Kriterion für die Trägheitsfusion muss etwas umgeformt werden, da bei den kurzen Zeiten Bremsstrahlung kaum eine Rolle spielt. Die kontrollierte Kernfusion soll nun durch Aufheizung eines Deuterium/Tritium-Kugels erreicht werden. Die notwendige Temperatur bleibt bei 15 keV. Die Fusionszeit ist ungefähr gegeben durch

$$\tau_F = \frac{n_1}{n_1 n_2 < \sigma v >} = \frac{1}{n_2 < \sigma v >}$$

Dis soll kleiner als die freie Expansionszeit sein:

$$\tau_F \leq \frac{R}{\sqrt{2k_B T/m_i}} = \frac{R}{v_{th}}$$

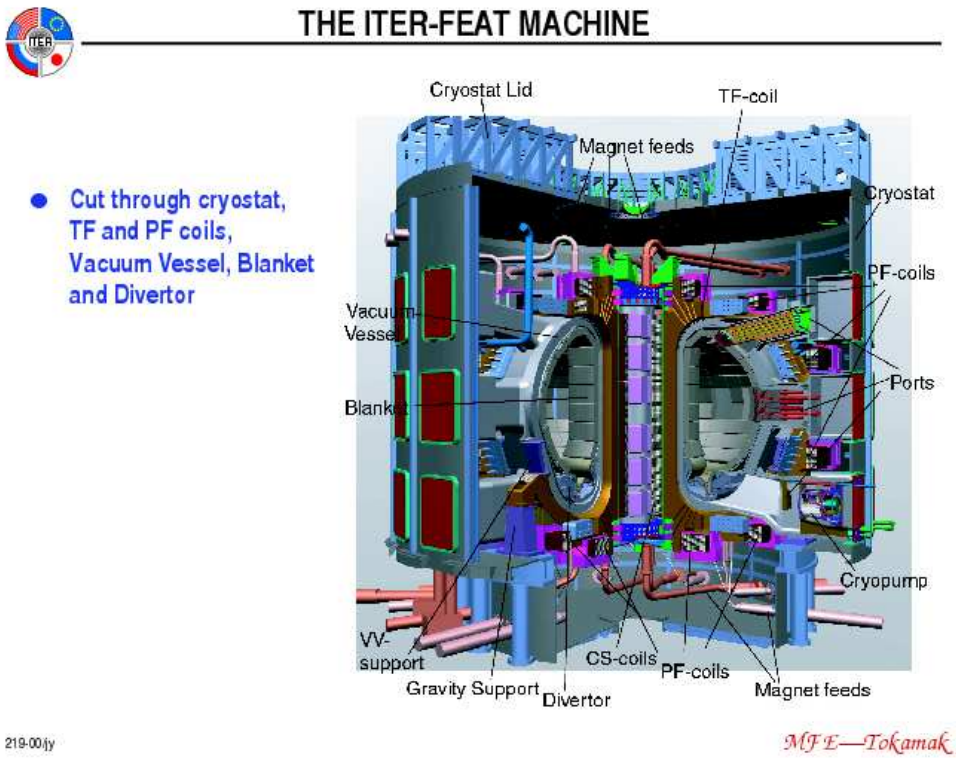
Man nehme eine D-T Mischung an, mit $n_1 = n_2 = n_e/2$ an. Bei einer Temperatur von 15 keV ist $< \sigma v > \ \approx\ 3 \cdot 10^{-16}\ cm^3/s$
Wie gross muss $\rho_m R$ mindestens sein, damit Fusion stattfindet? Die Dichte von gefrorenem Wasserstoff ist 0.2 g/cm^{-3}. Schätzen Sie die Teilchendichte n ab. Schätzen Sie den notwendigen Radius ab, und davon die Anzahl der Wasserstoff-Atomen in der Kugel (isotop egal). Wieviel Energie wird benötigt, um alle dieser Atomen auf 15 keV zu "'heizen"'? Angenommen, dass alle Atomen "'verbrannt"' werden zu alpha-Teilchen, wie viele Energie wird freigesetzt?
Was ändert sich, wenn die Dichte durch Komprimierung um einen Faktor 1000 erhöht werden kann?

4. Ein Tokamak hat den grossen Radius R=2.6 m, kleinen Radius a=0.9 m und ein toroidales Magnetfeld $B_T = 5.0$ T. Wie gross darf der Plasmastrom maximal sein, damit der Sicherheitsfaktor am Plasmarand

$$q_a = \frac{a\,B_T}{R\,B_{pol}}$$

grösser als 1 bleibt?

5. Der in einem Thompson-Streuung Diagnostik eingesetzte Laser hat die Wellenlänge $\lambda_0 = 700$ nm. Welche Wellenlänge λ' hat das gestreute Licht, wenn es von einem Elektron mit der kinetischen Energie 1 keV gestreut wird? (Wiederholung mit Energie 0,51 keV, 2 keV)



Der geplante Experimentalreaktor ITER

5 Transport im Plasma

Hier ist gemeint: Diffusion, elektrische Leitfähigkeit, Wärmetransport usw.
Man hat in der Praxis nie ein unendlich ausgedehntes, homogenes Plasma. In einem reellen Plasma gibt es gradienten in Dichte, Temperatur, Druck usw. Dies führt zu Diffusion, wobei das Plasma versucht, diese nicht gleichförmigen Eigenschaften auszugleichen.
Analog ist das Verhalten eines Tropfens Tinte in einem grossen Gefäss Wasser. Die Tinte diffundiert, bis die Farbe gleichmässig verteilt wird. Dies passiert ohne eine treibenden Kraft.
Die Diffusionsgeschwindigkeit wird durch Stösse kontrolliert.
Eine genaue Berechnung solcher Prozesse ist ziemlich kompliziert. Die Wahrscheinlichkeit, dass Stösse zwischen Teilchen stattfinden hängt von Teilchen Eigenschaften (Ladung, Masse) sowie von der relativen Geschwindigkeit der Teilchen ab. Man muss dann über alle möglichen Geschwindigkeiten mitteln. Die effektive Stoßfrequenz hängt dann von dem betrachteten Prozess ab und ist auch mit Sicherheit unterschiedlich für Elektronen und Ionen.
Deshalb muss man die MHD erweitern (auf 2 Flüssigkeiten). In einem solchen Modell wird jede Teilchen Sorte als eine Flüssgkeit behandelt. Die Flüssigkeiten durchdringen einander. Beide erfüllen eine Kontinuitätsgleichung (hier ohne Quellterm oder Rekombination):

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \vec{v}_\alpha) \simeq 0$$

(α=Ion oder Elektron), und eine Bewegungsgleichung

$$n_\alpha m_\alpha \Big[\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + (\vec{v}_\alpha \cdot \nabla)\vec{v}_\alpha\Big] = -\nabla p_\alpha + q_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \vec{v}_\alpha \times \vec{B}) + \vec{R}_\alpha$$

$\vec{R}_\alpha$ entspricht Stösse; auch sonstige Kräfte sind möglich)
Natürlich sind Elektronen und Ionen verknüpft. Vor allem durch die Maxwell Gleichungen aber auch über Stösse

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= e(Zn_i - n_e)/\epsilon_0 \\
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \Big[e(Zn_i\vec{v}_i - n_e\vec{v}_e) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\Big] \\
\nabla \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Man beachtet, dass aufgrund der sehr unterschiedlichen Massen von Elektronen und Ionen, ein Elektron viel mehr in einem gegeben EM-Feld beschleunigt wird. Die Charakteristische Frequenzen der Elektronenbewegung (ω_p, ω_c) sind viel größer als die der Ionenbewegung.
Man kann sich auch ziemlich leicht überzeugen, dass Stösse zwischen gleichen Teilchen (i-i oder e-e) kein Transport verursachen, und dienen nur dem Erhalten des thermischen Gleichgewichts.
z.B. Bei einem Zentralstoß zwischen identischen Teilchen, werden die 2 Teilchen effektiv getauscht. Auch bei einem 90° Stoss im magnetisierten Plasma ändern sich zwar die Bahnen

und auch die Bahn des Führungszentrums jedes Teilchens aber der Schwerpunkt der beiden Teilchen bewegt sich kaum. Für jedes Teilchen, dass sich aus einem Flüssigkeitselement fortbewegt, kommt meistens ein anderes hinein ⇒ kein Transport (oder wenig)

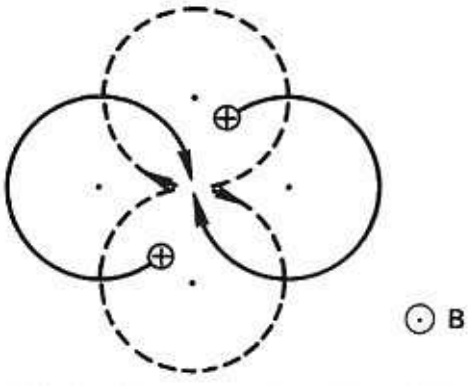


Figure 97: Shift of guiding centers of two like particles making a 90° collision.

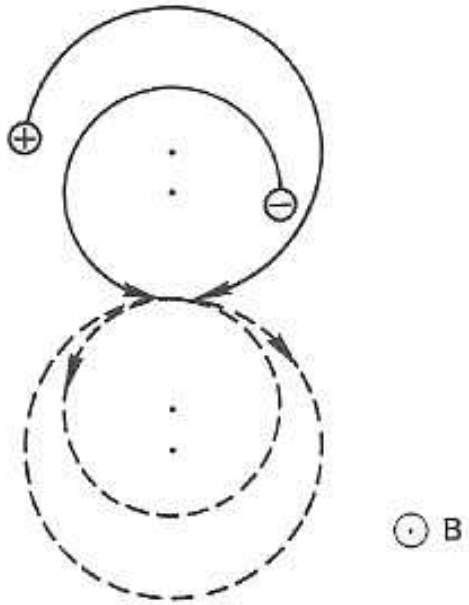


Figure 98: Shift of guiding centers of two oppositely charged particles making a 180° collision.

Transport findet dann statt, wenn 2 ungleiche Teilchen mit unterschiedlicher Ladung (z.B. e+i aber auch e+Neutral bzw. i+Neutral) aufeinander Stoßen. Beide Führungszentren bewegen sich nun in der gleichen Richtung, da die Rotationsrichtung unverändert bleibt.
Wie sieht der Stossterm $\vec{R}$ aus ?
Wir müssen die Wahrscheinlichkeit für eine Änderung des Impulses eines Teilchens abschätzen. Dafür sind Grundbegriffe wie Stoßzeit, Stoßfrequenz, mittlere freie Weglänge, Wirkungsquerschnitt (aus Atomphysik, Kernphysik) nötig. Im folgenden werden nur elastische Stöße betrachtet, die nur Impuls und kinetische Energie der Teilchen ändern; Ionisieung, Rekombination oder atomare Anregung sind auch möglich.

Messtechnisch erfasst werden Stöße durch die Stoßfrequenz ν = Zahl der Stöße pro Sekunde. In schwach ionisierten Plasmen (z.B. Leuchtstoffröhren, Niederdruckentladungen etc.) sind Stöße zwischen Elektronen und Neutralteilchen am häufigsten (ν_{en} dominiert). Bei voll ionisierten Plasmen sind Elektronen-Ion-Stöße die wichtigsten (ν_{ei}).
Ein sehr vereinfachstes Modell zur Abschätzung der mittleren freien Weglänge und Stoßwahrscheinlichkeit:
Man nimmt vereinfachend an, dass die stoßenden Teilchen zwischen den Stößen geradlinig fliegen und dabei die "'mittlere freie Weglänge"' λ zurücklegen. Die "'freien"' Weglängen zwischen den Stößen sind in Wirklichkeit unterschiedlich lang.
Um Konkret zu sein, n_n sei die Dichte der Neutralteilchen und wir betrachten e-n Stöße (völlig analog für andere Fälle)

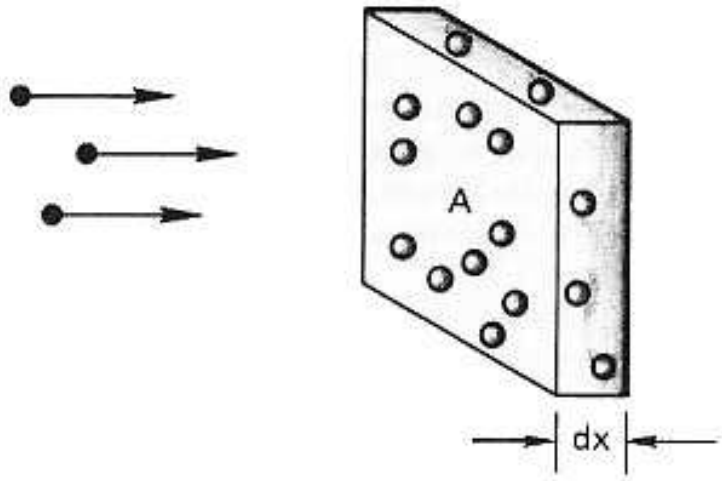


Figure 99: Definition of cross section.

Der Teilchen Fluss in die x-Richtung vor Durchdringen ist $\Gamma_{ex} = n_e v_{ex}$
Nach Durchdringen einer Länge dx werden $n_n \sigma dx$ Teilchen gestreut, wobei σ der effektive Wirkungsquerschnitt (gemittelt) ist. n_n= Dichte der Streuenden (neutral-)Teilchen. Daraus folgt:

$$\Gamma_{ex}(nacher) = \Gamma_{ex}(1 - n_n \sigma dx)$$

oder

$$\frac{d\Gamma_{ex}}{dx} = -n_n \sigma \Gamma_{ex}$$

$$\Gamma_{ex} = \Gamma_{ex}(0) e^{-n_n \sigma x} = \Gamma_{ex}(0) e^{-x/\lambda}$$

λ = mittlere freie Weglänge = $1/(n_n \sigma)$. Sie hängt mit der Stoßfrequenz folgendermaßen zusammen. Für monochromatische Strahlen (wie hier angenommen) ist die Zeit τ zwischen Stößen (im Mittel) gegeben durch

$$\lambda = \langle |\vec{v}_R| \rangle \tau$$

$\langle |\vec{v}_R| \rangle$ ist die mittlere (relative) Geschwindigkeit zwischen den Teilchen. Es gilt auch:

$$\tau = \frac{1}{\nu}$$

ν ist die Stoßfrequenz. Dann gilt

$$\nu_{eff} = n_n \langle \sigma |\vec{v}_R| \rangle$$

(bei evtl. Energie Anhängigkeit von σ in dem man, analog zur Fusionsreaktionen, über $\langle \sigma v \rangle$ mittelt.)
So (mindestens für diesen Fall) nimmt man an, dass

$$\vec{R}_\alpha = -m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha n}(\vec{v}_\alpha - \vec{v}_n)$$

und

$$\vec{v}_n \simeq 0$$

(kaltes oder nicht driftendes "'hintergrund"' Gas) passend als Zusatzterm in die Bewegungsgleichung ist i.e.:

$$\left.\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t}\right|_{coll.} \simeq \nu_{\alpha n}(\vec{v}_\alpha - \vec{v}_n)$$

Wir nehmen so an, dass es eine gute Näherung ist , mit $\nu_{\alpha n} \simeq$ Konst. = gemittelte Stoßrate, die Stöße zu beschreiben. Dies ist ausreichend, um ein Gefühl für die Phänomene zu bekommen. Danach kann man numerisch mit exakteren aber komplizierteren Modellen besser umgehen.
Für e-i Stöße ist alles ähnlich außer der Tatsache, dass die Berechnung von ν_{eff} aus der Rutherford Streuformel ziemlich umständlich ist.
Für e-i Stöße ist $\vec{R}_{ei} = -\vec{R}_{ie} = -m_e n_e(\vec{v}_e - \vec{v}_i)\nu_{ei}$ (Impulserhaltung).
Da wir erwarten $\nu_{ei} \propto Ze^2 = q_i q_e$, und $\nu_{ei} \propto n_i n_e$ schreiben wir

$$\vec{R}_{ei} = \eta n_e n_i Z e^2 (\vec{v}_i - \vec{v}_e)$$

Nun gilt $n_e = Zn_i$ (wegen quasineutralität)
und $\vec{j}_{el} = en_e(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$ (Stromdichte). Dann ist

$$\vec{R}_{ei} \; = \; \eta n_e e \vec{j}_{el}$$

mit

$$\eta = \frac{m_e \nu_{ei}}{e^2 n_e}$$

die electrische Resistivität=1/Leitfähigkeit
Dies verbindet die elektrische Leitfähigkeit mit Stössen.
Nun gehen wir zurück zur einfacheren Modell mit neutralen Teilchen und setzen wir dies in die Bewegungsgleichung ein :

$$m_\alpha n_\alpha [\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + (\vec{v}_\alpha \cdot \nabla)\vec{v}_\alpha] = -\nabla p_\alpha + q_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \vec{v}_\alpha \times \vec{B}) - m_\alpha n_\alpha \nu_\alpha \vec{v}_\alpha$$

Für erste Überlegungen, nehmen wir an, dass $\nu|\vec{v}| \gg |(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}|$ und dass $\vec{B} \simeq 0$. Dann ist $mn\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq qn(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \nabla p - mn\nu\vec{v}$, bzw. $mn\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq qn\vec{E} - \nabla p - mn\nu\vec{v}$
Ein stationärer Zustand bedeutet $\frac{\partial v}{\partial t}$=0.
(analog: Gleichung für die Endgeschwindigkeit einer Kugel oder Öltropfens in einer zähen Flüssigkeit).

Wenn $\vec{B} = 0$ ist die Lösung einfach. Wir lösen nach $\vec{v}$ auf.

$$\vec{v} \simeq \frac{1}{mn\nu}[qn\vec{E} - \nabla p]$$

und benutzen $\nabla p = \gamma k_B T \nabla n$ aus der Zustandsgleichung.
Nun Definieren wir die Beweglichkeit: $\mu = \left|\frac{q}{m\nu}\right|$
und den Diffusionskoeffizient: $D = \frac{k_B T}{m\nu}$
Beweglichkeit und Diffusionskoeffizient sind über die Einstein'schen Beziehungen verknüpft

$$\mu = \frac{|q|D}{k_B T}$$

Es gilt:
$\vec{v} = \pm\mu\vec{E} - \gamma D \nabla n/n$
Der Teilchenfluß ist $\vec{\Gamma} = n\vec{v}$ (jede Teilchensorte) $(n_e = Zn_i = n)$
Zwei interessante Grenzfälle sind:
1. $\nabla n \simeq 0 \;\Rightarrow\;$ Ohm'sche Gesetz

$$\vec{j} = q_e\vec{\Gamma}_e + q_i\vec{\Gamma}_i = -q_e\mu_e n\vec{E} + q_i\mu_i n\vec{E}$$

(sonst auch $(-\gamma_{eq_e} D_e \nabla n - \gamma_{iq_i} D_i \nabla n)$). Dies ergibt

$$\vec{j} = ne^2\Big[\frac{1}{m_e\nu_e} + \frac{Z^2}{m_i\nu_i}\Big]\vec{E} = \frac{E}{\eta}$$

(plus möglicherweise $[e\gamma_e D_e - Ze\gamma_i D_i]\nabla n$)
2. $\vec{E} \simeq 0 \;\Rightarrow\; \vec{\Gamma} = -D\nabla n$
(Ficksche Gesetz). $D > 0$ entspricht dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik.
Der Transport von Teilchen ist somit durch Stöße, i.e. im wesentlichen durch zufällige Prozesse kontrolliert.
In einem Plasma spielen auch Kollektive Effekte eine Rolle.
Da es oft passiert, dass sowohl $\vec{E} \neq 0$ als auch $\nabla n \neq 0$ muß man die Kombinierte Gleichung analysieren.

5.1 Ambipolare Diffusion

Ein Plasma entsteht (wird erzeugt) in einem Kammer oder Behälter. Wenn nicht etwas getan wird, um es aufrecht zu erhalten, wird es aufgrund von Diffusion in Richtung der Wände irgendwann verschwinden, da die Elektronen und Ionen durch "'Rekombination"' an den Wänden wieder neutralisiert werden. In Wandnähe gilt $n_e \simeq 0 \simeq n_i$
Die Flüssigkeitsgleichungen bestimmen die Bewegung. Diese sind für Elektronen und Ionen nicht völlig entkoppelt.

- erstens soll Ladungsneutralität gelten
- zweitens werden die Bewegungen über die Maxwellgleichungen mitbestimmt.

Dies führt dazu, das die Diffusion (Diffusionsrate) im wesentlichen durch die langsamsten Teilchen bestimmt wird (Ionen bremsen die Diffusion der Elektronen).
Es gilt für jede Teilchensorte in einem stationären Zustand ($\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial t} \simeq 0$ und $\vec{\Gamma}_j = n_j \vec{v}_j$)

$$\vec{\Gamma}_j = \pm \mu_j n_j \vec{E} - D_j \nabla n_j$$

Auch gelten die Kontinuitätsgleichungen

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \vec{\Gamma}_j = 0$$

Wenn die Plasma-Dimensionen$\gg \lambda_D$ sind, herrscht nicht nur Ladungsneutralität ($Zn_i \simeq n_e$) sondern auch Stromneutralität ($\vec{\Gamma}_i \simeq \vec{\Gamma}_e$), damit die Ladungsneutralität für alle Zeiten erhalten bleibt.
Die Elektronen haben zwar höhere thermische Geschwindigkeiten und fliegen zuerst aus dem Plasma. Was übrig bleibt ist positiv geladen und hält die Elektronen zurück. Gleichzeitig werden die Ionen abgestoßen und in Richtung Wand beschleunigt. Die Bewegung der zwei Teilchensorten stellt sich so ein, dass das Plasma neutral bleibt (auch Strom neutral).
Ein Ergebnis ist eine Plasmarandschicht ("'sheath"'), die hier nicht weiter diskutiert wird. Die Dicke der Randschicht beträgt einige Debyelängen und dort gibt es ein elektrisches Feld. Aus der Stromneutralität kann das elektrische Feld bestimmt werden

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_i = \vec{\Gamma}_e \quad \Rightarrow$$

$$\mu_i n \vec{E} - D_i \nabla n = -\mu_e n \vec{E} - D_e \nabla n$$
$$(\mu_i + \mu_e) n \vec{E} = (D_i - D_e) \nabla n$$
$$\vec{E} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n}$$

Das so entstandene elektrische Feld heißt ambipolares Feld. Es entsteht um die Stromneutralität zu gewährleisten.
Der Teilchenfluß ist dann

$$\begin{aligned}
\vec{\Gamma} &= \mu_i \left(\frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \right) \nabla n - D_i \nabla n \\
&= -\mu_e \left(\frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \right) \nabla n - D_e \nabla n \\
\vec{\Gamma} &= -\left(\frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_i + \mu_e} \right) \nabla n = -D_a \nabla n
\end{aligned}$$

Man hat wieder das Ficksche Gesetzt mit einer effektiven Diffusionskonstanten.
Nun, wenn die Temperatur konstant bleibt und $\gamma_i \simeq \gamma_e \simeq 1$ und $D_a \simeq$konst, können wir schreiben

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\Gamma} = \nabla \cdot (D_a \nabla n) \simeq D_a \nabla^2 n$$

(Diffusionsgleichung)
D_a kann von T abhängen. Die 2. Version gilt nur wenn D_a nicht vom Ort abhängt.

Dieses elektrische Feld hat den Effekt, dass die Diffusion der Ionen grösser wird, und die der Elektronen kleiner.
Anmerkung: $\nu \propto \sqrt{kT/m}$. Dann gilt

$$\mu = \frac{q}{m\nu} \propto \frac{1}{\sqrt{mkT}}$$

Daraus folgt (wenn $T_e \simeq T_i$)

$$\mu_e \sim 40\mu_i \gg \mu_i$$

und somit auch

$$D_a \simeq D_i + \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e = D_i \left(1 + \sqrt{\frac{T_e}{T_i}}\right)$$

Die Diffusionskonstante wird aber immer noch durch die langsamere Teilchensorte bestimmt.

5.2 Lösung der Diffusionsgleichung

Die Diffusionsgleichung lautet

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla n) \simeq D\nabla^2 n$$

für D=Konst. ist als erster Schritt Trennung der Variablen angebracht:

$$n(\vec{r}, t) = T(t)S(\vec{r})$$

$$S\frac{dT}{dt} = DT\nabla^2 S$$

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{D}{S}\nabla^2 S$$

Da die Seiten jeweils nur von T bzw. von $\vec{r}$ abhängen, müssen sie jede für sich Konstant sein, und gleich $-1/\tau$ (Definiert τ - Trennungskonstante)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{T}{\tau} \quad \Rightarrow \; T \; = \; T_0 e^{-t/\tau}$$

(typisch: expotentieller Abfall)
und

$$\nabla^2 S = -\frac{1}{D\tau} S$$

(ähnlich Eigenwert-Gleichung für den Laplace Operator)
In einem rechteckigen Gebiet mit Längen 2 L_x, 2 L_y, und 2 L_z gilt

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -\frac{1}{D\tau} S$$

Lösungsansatz : $S(x, y, z) = S_x(x)S_y(y)S_z(z)$
Dann gilt

$$\frac{1}{S_x}\frac{d^2 S_x}{dt^2} + \frac{1}{S_y}\frac{d^2 S_y}{dt^2} + \frac{1}{S_z}\frac{d^2 S_z}{dt^2} \; = \; -\frac{1}{D\tau}$$

Jeder Term muss konstant sein, z.B.

$$\frac{1}{S_x}\frac{d^2S_x}{dt^2} \;=\; C_x$$

usw., mit $C_x + C_y + C_z \;=\; -1/D\tau$.
Falls alles unabhängig von y,z ist (bzw. $C_y = C_z = 0$), haben wir eine bekannte Gleichung mit der Lösung

$$S(x) \;=\; A\cos(x/\sqrt{D\tau}) \;+\; B\sin(x/\sqrt{D\tau})$$

Wir können erwarten, dass die Dichte fast null an den Wänden ist und das sie ein Maximum in der Mitte hat. Deshalb wählen wir den Ursprung in der Mitte des Gebiets.
Aus Symmetriegründen erwarten wir, dass $S_x(x) \simeq S_x(-x)$ und dass $S \simeq 0$ für $x = \pm L_x$
Dann sind die Sinus Terme $\simeq 0$

$$\frac{L_x}{\sqrt{D\tau}} = \frac{\pi}{2}$$

Dies bestimmt τ aus den Randbedingungen.

$$\tau = \left(\frac{2L_x}{\pi}\right)^2 \frac{1}{D}$$

Daraus folgt

$$n(x,t) = n_0 e^{-t/\tau}\cos\Big(\frac{\pi x}{2L_x}\Big)$$

Dies lässt sich leicht auf 3-Dimensionen erweitern. Es gilt dann

$$n(x,y,z,t) = n_0 e^{-t/\tau}\cos\Big(\frac{\pi x}{2L_x}\Big)\cos\Big(\frac{\pi y}{2L_y}\Big)\cos\Big(\frac{\pi z}{2L_z}\Big)$$

$$\frac{1}{D\tau} = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2}\right)$$

$$\tau = \frac{4}{\pi^2 D}\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2}\right)^{-1}$$

Dies ist die so genante Grundmode.
Die Dichte ist ein Produkt von cosinus Termen und die Amplitude zerfällt mit der Zeit.
$\tau \propto 1/D$ und wird grösser, wenn die Dimensionen des Gebiets grösser werden.
Ist die Lösung eindeutig ?
Gehen wir zurück zum 1-Dimensionalen Fall. Die allgemeinste Lösung von

$$D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial n}{\partial t}$$

miit den Randbedingungen $n(\pm L, t) = 0$ ist

$$\begin{aligned} n(x,t) &= \sum_\ell T_\ell(t) S_\ell(x) \\ &= n_0\Big[\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell e^{-t/\tau_\ell}\cos\frac{(\ell+1/2)\pi x}{L} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{-t/\tau_m}\sin\frac{m\pi x}{L}\Big] \end{aligned}$$

Übung: man setzt ein und weist nach, dass dies eine Lösung ist, wenn

$$\frac{1}{\tau_\ell} = D\left[\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}\right]^2$$
$$\frac{1}{\tau_m} = D\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$$

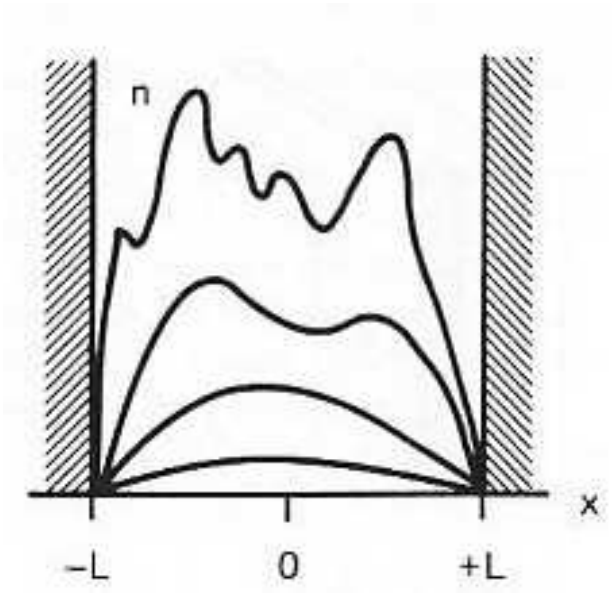


Figure 100: Die Diffusion glättet Strukturen in der Dichte.

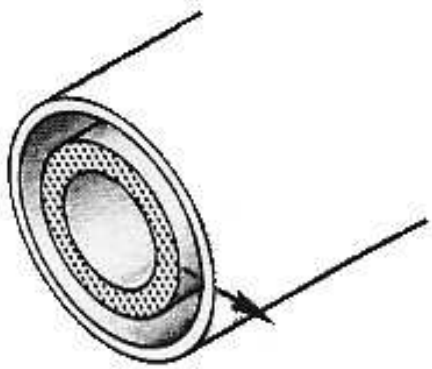
Die "'höheren Moden"' ($\ell, m > 0$) zerfallen schneller, da die Zeitkonstanten größer sind.
Die Diffusion glättet Strukturen in der Dichte.
Die Koeffizienten a_ℓ und b_m können von der Anfangsverteilung $n(x, 0)$ bestimmt werden, da $n(x, 0)$ eine normale Fourier-Reihe ist.

5.2.1 Diffusion in einem Zylinder

Viele Plasmen haben zylindrische Symmetrie. Um dies zu erläutern, wird ein zylindrisches Plasma untersucht. Der Zylinder sei sehr lang und wir nehmen azimuthale Symmetrie an. Dann ist alles unabhängig von ϕ und z. Sonst muss man auch einen Trennungsansatz machen.
Die radiale Abhängigkeit ist dann durch

$$\frac{d^2S}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dS}{dr} + \frac{1}{D\tau}S = 0$$

(Die Zeitabhängigkeit bleibt gleich) gegeben
Bei $r \to 0$ muss $\frac{dS}{dr} = 0$ sein.
Die Gleichung entnimmt man einer Formelsammlung oder einer einfachen Betrachtung: Die Plasmaschicht ist ringförmig. Falls sie sich in Richtung grösserer r bewegt (bei konstanter Dicke dr) muss die Dichte n mit $1/r$ kleiner werden ($n2\pi r dr = konst.$)



Die Lösung dieser Gleichung sieht wie ein gedämpfter Cosinus aus und heißt Bessel Funktion.
Es sei $k = 1/\sqrt{D\tau}$, $\rho = kr = r/\sqrt{D\tau}$.
Dann gilt

$$\frac{d^2S}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dS}{d\rho} + S = 0$$

$$S = n_0 J_0(\rho) = n_0 J_0\left(\frac{r}{\sqrt{D\tau}}\right)$$

Als Reihenentwicklung:

$$J_0(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\rho^2/4)^n}{(n!)^2}$$

Unsere Randbedingung lautet $n = 0$ für $r = a$, wobei a = Radius des Plasmarohrs.
$J_0(ka) = 0$
$ka = y_p$ (Nullstellen von J_0 aus Tabelle) $\quad y_1 = 2,4048$, $y_2 = 5,5201$, $y_3 = 8,6537$ etc.
$a/\sqrt{D\tau} = y_p \quad \Longrightarrow \tau = \dfrac{a^2}{Dy_p^2}$

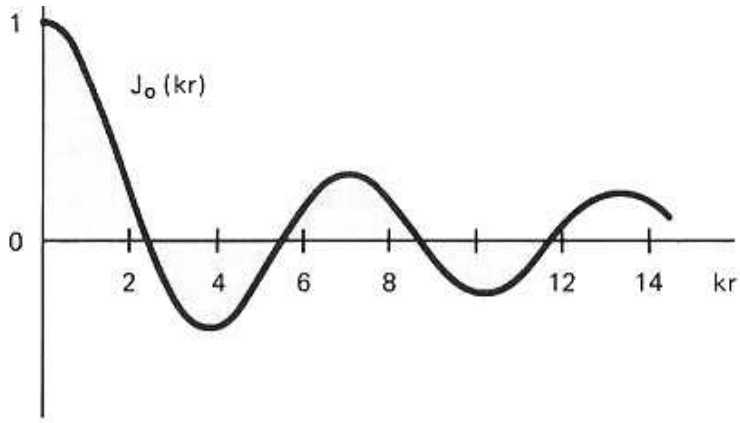


Figure 101: Besselfunktion $J_0(x)$

Wir können die Anfangsdichte auch in Besselfunktionen entwickeln, analog zur

Fourier-Reihe. Es handelt sich um den gleichen Formalismus für zylindrische Koordinaten.

$$n(r,0) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p J_0\left(\frac{y_p r}{a}\right)$$

Dann gilt für die Entwicklungskoeffizienten:

$$C_p \;=\; \frac{2}{[J_0'(y_p)^2]^2} \int_0^a n(r,0) J_0\left(\frac{y_p r}{a}\right) r dr$$

Aus Formelsammlungen findet man

$$\int_0^a J_0\left(\frac{y_p r}{a}\right) J_0\left(\frac{y_q r}{a}\right) r dr \;=\; \frac{a^2}{2} J_1^2\left(y_p\right) \delta_{pq}$$

Mit $\tau_p = a^2/(Dy_p^2)$ erhält man

$$n(r,t) \;=\; \sum_{p=1}^{\infty} C_p J_0\left(\frac{y_p r}{a}\right) e^{-tDy_p^2/a^2}$$

Nach einiger Zeit bleibt nur der Term mit p=1 übrig.
Anmerkung: Wenn man sich viel mit zylindrischen Koordinaten beschäftigt, wird man unvermeidlich Besselfunktionen oft treffen. Analog auch: die Kugelfunktionen bei sphärischer Geometrie.

5.3 Quelltermen

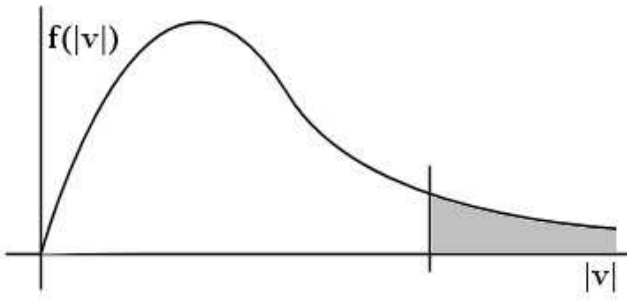
Bei vielen Experimenten wird das Plasma in einem stationären Zustand gehalten (entweder durch kontinuierliche Ionisation oder Einschuss von Teilchen (entweder schon ionisiert oder Neutral mit nachfolgender Ionisation), um die Verluste zu Kompensieren).
Die Kontinuitätsgleichung enthält einen Quellterm:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\nabla^2 n \;=\; Q(\vec{r},t)$$

In einem stationären Zustand ist Q unabhängig von t und $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$
Dann gilt

$$\nabla^2 n \;=\; -Q(\vec{r})/D$$

Es sieht ähnlich aus wie die Poisson Gleichung und die Lösungsmethoden sind ähnlich. Aber wir brauchen vor allem ein Modell für Q (dies wird physikalisch bestimmt, erraten, vermutet, ...)
Beispiele:
a. Bei schwach ionisierten Gasen kommt die Ionisation von Stößen mit energischen Elektronen, die am Schwanz de Maxwellverteilung liegen. Dann ist $Q \propto n$ z.B. $Q = Z(Temp)n$. Z=Ionisationsfunktion. Bei der Photoionisation (äußere Lichtquelle) gilt $Q = \beta(\lambda_{\text{Licht}})n$.



Dann gilt

$$\nabla^2 n = -\frac{Z}{D} n$$

Bei Z=konst. haben wir das gleiche Profil wie bei der Diffusion vorher. Nur ohne Zerfall mit der Zeit. Das Plasma wird durch Zufuhr von Wärme (um T_e zu halten) und Injektion einiger Neutralteilchen (genug um die Diffusion zu kompensieren) aufrecht erhalten. (sonst wird $Z \neq konst$ und die Annahme gilt nicht mehr)

b. Rekombination

Wenn ein Stoß zwischen einem Elektron und einem Ion bei niedriger Geschwindigkeit stattfindet, gibt es eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass die Reaktion

$$e + Ion \rightarrow Neutral + Photon$$

stattfindet. $Q(\vec{r})$ ist negativ und proportional zu $n_e n_i = n^2$

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\nabla^2 n = -\alpha n^2 \tag{5}$$

α heisst Rekombinationskoeffizient

Hier darf man nicht annehmen, dass die Zeitabhängigkeit wegfällt!

Auch ist anzumerken, dass die Standardmethoden, die auf Überlagerungen von Lösungen basieren, nicht bei nichtlinearen Gleichungen gelten. Diese nichtlineare Gleichung kann man (für die Zeitabhängigkeit) lösen, wenn man die Näherung $D\nabla^2 n \simeq -n/\tau$ macht. Dann wird die Gleichung 5

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\alpha n^2 - n/\tau$$

Mit den Definitionen $f = 1/n$ und $n_0 = n(t=0)$, $f_0 = 1/n_0$, erhält man

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{n^2}\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha + f/\tau$$

mit der Lösung

$$f = (f_0 + \alpha\tau)e^{t/\tau} - \alpha\tau$$

oder

$$n(t) = \frac{n_0}{(1 + n_0\alpha\tau)e^{t/\tau} - n_0\alpha\tau}$$

Wenn $t \ll \tau$ gilt

$$n(t) \simeq \frac{n_0}{1 + n_0 \alpha t + t/\tau}$$

und wenn $t \gg \tau$ gilt

$$n(t) \simeq \frac{n_0}{1 + n_0 \alpha \tau} e^{-t/\tau}$$

Abb. 102 zeigt die Dichte im "'afterglow"' eines schwach ionisierten Wasserstoff Plasmas

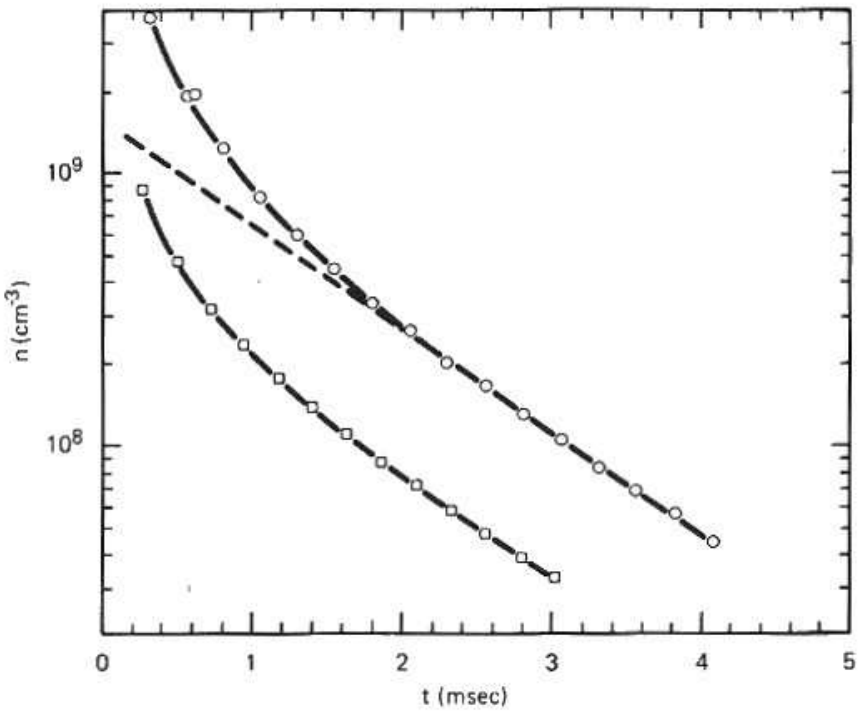


Figure 102: Density decay curves of a weakly ionized plasma under recombination and diffusion. (From S.C. Brown, *Basic Data of Plasma Physics*, John Wiley and Sons, New York, 1959)

als Funktion der Zeit.
n groß $\rightarrow$ Rekombination dominiert und $n \sim (\alpha t)^{-1}$
Später wird n klein, $D\nabla^2 n > \alpha n^2$ und exponentielle Zerfall wird beobachtet. Das Experiment zeigt beide Verhalten. Die zwei Raten sind gleich für
$\left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{Diff} = \frac{-n}{\tau_D} = \left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{recomb} = -\alpha n^2$

5.4 Diffusion in Anwesenheit eines Magnetfeldes

Wie immer werden alle Transportphänomene davon abhängig, ob der Transport senkrecht oder parallel zum Magnetfeld ist. Die Beweglichkeit und die Diffusionskonstante werden Tensoren. Da viele experiementellen Plasmen magnetisch eingeschlossen werden und da in der Ionosphäre das Erdmagnetfeld eine Rolle spielt, müssen wir diese Möglichkeit untersuchen.

Bei einem nicht zu starken ionisierten Plasma mit $Z = 1$ gilt

$$mn\frac{d\vec{v}}{dt} = \pm en\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) - \gamma k_B T\nabla n - mn\nu\vec{v}$$

Bei einem stationären Zustand mit $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ gilt

$$nm\nu\vec{v} \simeq \pm en\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) - \gamma k_B T\nabla n$$

Das $\vec{v}\times\vec{B}$-Term koppelt die Geschwindigkeitskomponenten $\perp \vec{B}$
Nehmen wir das Magnetfeld in z-Richtung. Die Gleichung wird (mit $\vec{\omega_c} = \frac{|e|B}{m}\hat{z}$)

$$\vec{v} \simeq \pm\frac{e}{m\nu}\vec{v}\times\vec{B} \pm \frac{e}{m\nu}\vec{E} - \frac{\gamma k_B T}{m\nu}\frac{\nabla n}{n}$$

die z-Komponente ist wie gehabt

$$v_z = \pm\frac{e}{m\nu}E_z - \frac{\gamma k_b T}{mn\nu}\frac{\partial n}{\partial z}$$

$$\Gamma_z = nv_z = \pm\mu_\parallel nE_z - \gamma D_\parallel\frac{\partial n}{\partial z}$$

Die Flüssigkeitsbewegung $\perp \vec{B}$ wird etwas komplizierter.

$$\Gamma_x = nv_x = \pm\frac{n\omega_c}{\nu}v_y \pm \frac{en}{mv}E_x - \frac{\gamma k_B T}{m\nu}\frac{\partial n}{\partial x} = \pm\frac{\omega_c}{\nu}\Gamma_y \pm \mu_\parallel nE_x - \gamma D_\parallel\frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\Gamma_y = \mp\frac{\omega_c}{\nu}\Gamma_x \pm \mu_\parallel nE_y - \gamma D_\parallel\frac{\partial n}{\partial y}$$

Die Lösung nach Γ_x und Γ_y ist standard. Das Algebra ist länglich.

$$\Gamma_y = \pm\mu_\parallel nE_y - \gamma D_\parallel\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\omega_c}{\nu}\mu_\parallel nE_x - \frac{\omega_c^2}{\nu^2}\Gamma_y \pm \gamma\frac{\omega_c}{\nu}D_\parallel\frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\left(1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}\right)\Gamma_y = \pm\mu_\parallel nE_y - \gamma D_\parallel\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\omega_c}{\nu}\mu_\parallel nE_x \pm \gamma\frac{\omega_c}{\nu}D_\parallel\frac{\partial n}{\partial x}$$

Die physikalische Ursprung der letzten 2 Terme ist leicht erkennbar :
Der Beitrag zu v_y erhält man aus :

$$\underbrace{-\frac{\omega_c}{\nu}\mu_\parallel E_x}_{(1)} \pm \underbrace{\frac{\omega_c}{\nu}\frac{\gamma D_\parallel}{n}\frac{\partial n}{\partial x}}_{(2)}$$

$$(1) \quad -\frac{\omega_c}{\nu}\mu_\parallel E_x = -\frac{\omega_c e/m}{\nu^2}E_x = -\frac{\omega_c^2}{\nu^2}\frac{E_x}{B_z} = \frac{\omega_c^2}{\nu^2}\frac{(\vec{E}\times\vec{B})_y}{B^2} = \frac{\omega_c^2}{\nu^2}v_{E_y}$$

$$(2) \qquad \frac{\gamma k_B T}{m\nu^2}\frac{1}{n}(-\nabla n \times \vec{\omega}_y)_y = \frac{\gamma k_B T}{enB}\frac{\omega_c^2}{\nu^2}\frac{(-\nabla n \times \vec{B})_y}{B} = \frac{\omega_c^2}{\nu^2} v_{D_y}$$

Der Beitrag zur Beweglichkeit ist der $\vec{E} \times \vec{B}$-Drift und der Beitrag zur Diffusions konstante ist der diamagnetische Drift. Diese Drifts Verursachen die zusätzlichen Terme.
Ähnlich

$$\Gamma_x = nv_x = \frac{1}{1+\omega_c^2/\nu^2}\left[\pm\mu_\parallel n E_x - \gamma D_\parallel \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{n\omega_c^2}{\nu^2}\left(v_{E_x} + v_{D_x}\right)\right]$$

Wir definieren

$$\mu_\perp = \frac{\mu_\parallel}{1+\omega_c^2/\nu^2}$$

$$D_\perp = \frac{D_\parallel}{1+\omega_c^2/\nu^2}$$

$$\mu_T = \frac{\omega_c^2 e/m}{\omega_c^2+\nu^2} = \frac{\nu\omega_c\mu_\parallel}{\omega_c^2+\nu^2}$$

$$D_T = \frac{\nu\omega_c D_\parallel}{\omega_c^2+\nu^2}$$

Die bisherigen Ergenisse können in Matrix Form geschrieben werden :

$$\begin{pmatrix}\Gamma_x\\ \Gamma_y\\ \Gamma_z\end{pmatrix} = \pm n \begin{pmatrix}\mu_\perp & \mu_T & 0\\ -\mu_T & \mu_\perp & 0\\ 0 & 0 & \mu_\parallel\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix}D_\perp & D_T & 0\\ -D_T & D_\perp & 0\\ 0 & 0 & D_\parallel\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x n\\ \partial_y n\\ \partial_z n\end{pmatrix}$$

Die Einstein-Relation gilt für alle Komponenten des Tensors $D = k_B T\mu/|e|$
Die Grösse der Beweglichkeit senkrecht zum Magnetfeld wird um den Faktor $1/(1+\omega_c^2/\nu^2)$ reduziert. Man kann dies auch qualitativ verstehen
Die Diffusion betrachtet man als "'randomwalk"' ("'Zufalls schritt"') mit der Schrittweite λ_m (die mittlere freie Weglänge)

$$v \sim n_n \sigma \left\langle v_{Th}^2\right\rangle^{1/2} \sim \left\langle v_{Th}^2\right\rangle^{1/2}/\lambda_m$$

$$D \sim \frac{k_B T}{m\nu} \sim \frac{v_{Th}^2}{\nu} \sim \lambda_m^2 \nu$$

Nun, zumindest wenn $\omega_c \gg \nu$ ist

$$D_\perp \simeq D_\parallel \frac{\nu^2}{\omega_c^2} \sim \frac{v_{Th}^2}{\omega_c^2}\nu \simeq r_L^2 \nu$$

Die Schrittlänge des "'randomwalks"' wird der Larmor Radius r_L, statt die mittlere freie Weglänge. Da die Diffusion senkrecht zum Magnetfeld langsamer als die parallel zum Magnetfeld ist, hilft es, die Plasmateilchen einzusperren.
Diffusion $\perp \vec{B}$ hat wegen der entsprechenden Drifts auch komponenten senkrecht zu ∇n und $\vec{E}$. Diese Drifts werden, aufgrund von Stössen, auch um den Faktor $1/(1+\omega_c^2/\nu^2)$ verlangsamt. Da diese oft parallel zu den Wänden laufen, verursachen sie keine Verluste in einem einfachen zylindrischen Plasma.

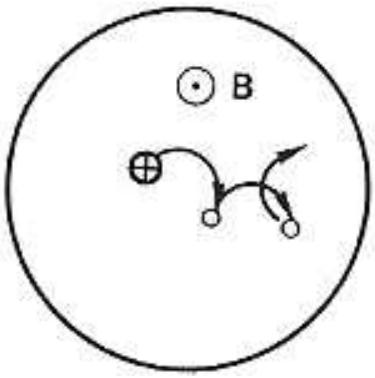


Figure 103: Diffusion of gyrating particles by collisions with neutral atoms.

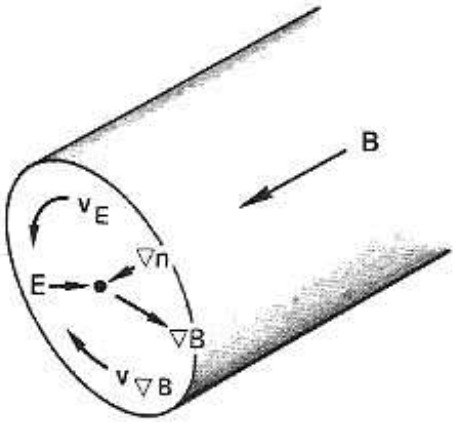


Figure 104: Particle drifts in a cylindrically symmetric plasma column do not lead to losses.

5.5 "'Klassische"'-Diffusion in einem ionisiertem Plasma

Hierfür ist wieder MHD als erste Näherung nützlich. Für einen stationären Zustand gilt

$$\frac{\partial \vec{v}_{sp}}{\partial t} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p \simeq 0$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{E} + \vec{v}_{sp} \times \vec{B} \simeq \eta \vec{j}$$

Die Komponente parallel zu $\vec{B}$ ist

$$\vec{E}_{\parallel} = \eta_{\parallel} \vec{j}$$

und senkrecht zu $\vec{B}$ ist

$$\vec{E} \times \vec{B} + \left(\vec{v}_{sp} \times \vec{B}\right) \times \vec{B} = \eta_{\perp} \vec{j} \times \vec{B} = \eta_{\perp} \nabla p$$

$$\vec{E} \times \vec{B} - \eta_{\perp} \nabla p = B^2 \vec{v}_{\perp}$$

Diffusion mit Resitivität $\eta_{\perp}$ in Richtung ∇p ($\perp \vec{B}$) und dazu der $\vec{E} \times \vec{B}$-Drift.
Beispiel: In einem Zylinder

$$\vec{E} = E\hat{r}, \quad \nabla\rho = -\frac{\partial\rho}{\partial r}\hat{r}, \quad \vec{B} = B\hat{z} \Longrightarrow$$

$$v_\theta = -\frac{E_r}{B}$$

$$v_r = -\frac{\eta_\perp}{B^2}\frac{\partial p}{\partial r} = -\eta_\perp\frac{j_\theta}{B}$$

in diesem Fall ist $r_z \simeq 0$, $\frac{\partial n}{\partial z} = 0$ da $\nabla p \perp \vec{B}$
(Magnetfeldlinien liegen auf Flächen konstanten Drucks)

$$\vec{\Gamma}_\perp = D_\perp \nabla n \Longrightarrow D_\perp = \eta_\perp \frac{k_B(T_e + T_i)}{B^2} n$$

Erwartung : $D_\perp \propto B^{-2}$
Dies soll genau so sein wie bei einem schwach ionosiertem Plasma. Es handelt sich um einen "'random walk"' mit Schrittweite = Larmor Radius.
Auch Erwarten wir $D_\perp \propto n$, da die Dichte der Streuzentren $\propto n$ ist.
Wie wir sehen werden ist $\eta_\perp \propto (k_B T_e)^{-3/2}$ und daher erwarte man auch $D_\perp \propto T^{-1/2}$

5.5.1 Bohm-Diffusion

Nun aber die Frage : Wie verträglich ist diese Abschätzung der Diffusionskonstante mit dem Experiment?
In einem Tokamak, wenn man für nicht homogene Magnetfelder, Bananen Bahnen usw. korrigiert, verhält sich der Ionentransport fast neoklassisch, die Elektronen aber nicht. (Turbulenz; auch hat es 30 Jahre gedauert, bis man es für Ionen erreichen konnte)
In anderen Experimenten, vor allem früherer (vor ca. 1965) hat man die Abhängigkeit $D_\perp \sim 1/B^2$ nicht feststellen können. Statt dessen beobachtete man

a) $D_\perp \sim T_e/B$ (erwartet $\sim T_e^{-1/2} n/B^2$

b) $(D_\perp)_{expt} \gg (D_\perp)_{klassisch}$

c) $D_\perp$ ist unabhängig von n

Die Dichte zerfällt wirklich wie $e^{-t/\tau}$, was beduetet, dass $D \simeq konst.$
Dieser schlechte, nicht klassische Einschluss heisst *Bohm Diffusion,* da sie zuerst 1946 von Bohm, Burhop, und Massey beobachtet worden war. Empirisch gilt

$$D_\perp \simeq D_B \simeq \frac{k_B T_e}{16eB}$$

Zum Experiment: $\tau \simeq \frac{-N}{dN/dT}$. In einem Zylinder wird dies

$$\frac{n\pi R^2 L}{\Gamma_r(2\pi RL)} = \frac{nR}{2\Gamma_r}$$

mit $\Gamma_r = D_B \frac{\partial n}{\partial r}$

$$\tau = \frac{nR}{2D_B \partial n/\partial r} \simeq \frac{nR}{2D_B(n/R)} \simeq \frac{R^2}{2D_B}$$

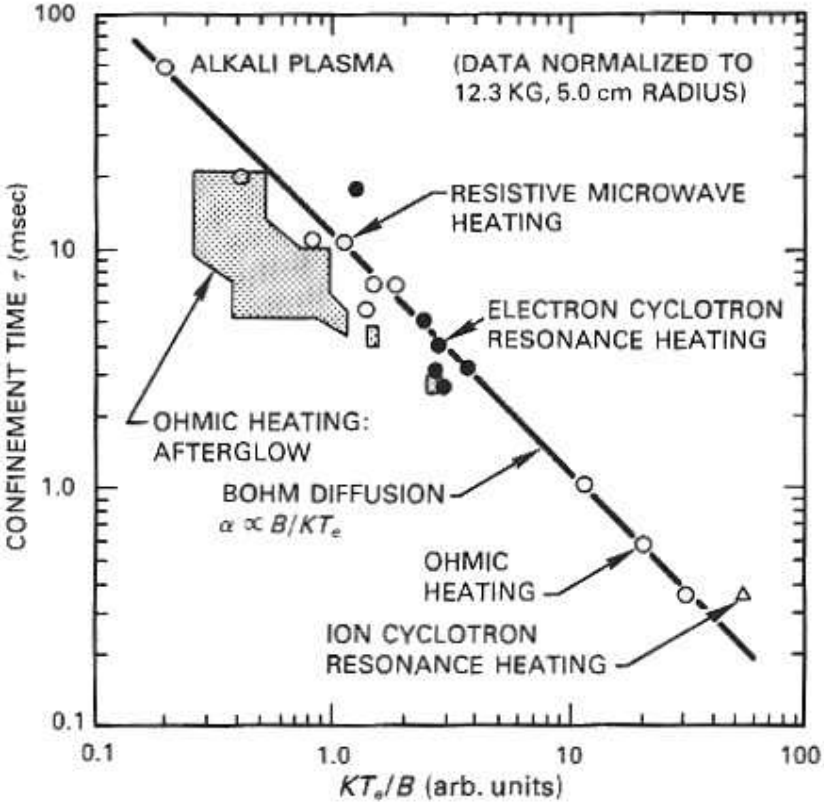


Figure 105: Summary of confinement time measurements taken on various types of discharges in the Model-C stellarator, showing adherence to the Bohm diffusion law. Thanks to D.J. Grove, Princeton University Plasma Physics Laboratory.

Eine Reihe von Experimenten an einem älteren Stellarator in Princton bestätigten diese erhöhte Diffusion (s. Abb. 105 (und waren so für die (fast) Aufgabe des Stellarator-Konzepts für Fusion) verantwortlich.
Konsequenzen für magnetischen Einschluss.
D_B wird grösser mit steigenden Temperaturen und nicht schnell genug kleiner mit steigendem Magnetfeld.
z.B. 100eV Plasma und $B \simeq 1T$ und $n \sim 10^{20}m^{-3}$

$$\begin{aligned} D_\perp|_{Klass} &\simeq \frac{2nk_BT}{B^2}\eta_\perp \\ &\simeq \frac{(2\times 10^{20}100eV)m^{-3}}{1V^2s^2m^{-4}}\frac{10^{-6}\Omega m}{1.6\cdot 10^{-19}Joule/e} \\ &\simeq 0.003m^2/s \end{aligned}$$

$$D_B = \frac{100eV}{16e(1Vs/m^2)} = 6.25m^2/s$$

Faktor 2000!!
Kann man dieses Verhalten verstehen (zumindest qualitativ)? Die Geometrien sind sehr Kompliziert. Kleine asymetrien im Magnetfeld lassen sich kaum vermeiden (entstehen durch endliche Dicke der Spulen, Windungen nicht 100% gleichmässig, etc).

Wenn Plasmawellen vorhanden sind gibt es zusätzlich elektrische und magnetische Felder, die die Plasmateilchen auch beeinflussen. Man kann Teilchen-Drifts ($\nabla p, \vec{E} \times \vec{B}$, etc) erwarten, die idealerweise nicht vorhanden sind.
Nehmen wir an, es gibt aus unerklärten Gründen ein elektrisches Feld senkrecht zu $\vec{B}$. Dann auf Grund des $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drifts gibt es den Fluss $\Gamma_\perp = nv_\perp \propto nE/B$

$$\text{Debye-Abschrimung} \implies e\Phi_{max} \propto k_B T_e$$
$$\vec{E} = -\nabla\Phi \implies E_{max} = \Phi_{max}/R$$

($R \sim$ Abmessung des Plasmas; die Abschätzung, die hier gemacht wird ist ziemlich grob.)

$$\Gamma_\perp \simeq const \cdot \frac{nk_B T_e}{eBR}$$

mit

$$\nabla n \simeq \frac{n}{R} \quad \text{ok für } \nabla\Phi = \frac{\Phi}{R}$$

gilt

$$\Gamma_\perp \simeq const \cdot \frac{k_B T_e}{eB} \nabla n \simeq -D_B \nabla n$$

die wesentliche Abhängigkeiten kommen richtig. Diese Abschätzung erklärt nicht, warum die Konstante gerade 1/16 ist.
Bohm Diffusion ist ein sehr gutes Beispiel der Grenzen des klassischen Modells. Die Diffusion oder Teilchentransport wird auch durch Verlustmechanismen beeinflusst, an die man vorerst gar nicht denkt und die nicht mit einfachen Modellen zu beschreiben sind.
z.B. : Plasma Heizung $\implies$ Oszillationen $\implies$ vorher nicht berechneten Felder.
Genügend unangenehen Überraschungen. Wenn man sorgfältig diese Effekte unterdrückt erreicht man Einschlusszeiten ca $100\tau_B$.

5.6 Diffusion als Zufallsbewegung

Wir betrachten eine Gruppe von Teilchen, die sich ausgehend von $x = 0$ längs der x-Achse bewegen. Die Teilchen machen in gleichen Abständen Δt einen Schritt der Länge Δx, dessen Richtung zufällig ist (gleiche Wahrscheinlichkeit recht oder links). Da bei einer großen Anzahl von Teilchen etwa gleich viele Schritte nach recht bzw. links gemacht werden, ist der mittlere Aufenthaltsort immer der Ursprung $\langle x \rangle = 0$.
Aber nach einiger Zeit werden die Teilchen sich aus ihrer Anfangsposition heraus ausgebreitet haben. Einige Teilchen werden sich weit nach rechts, anderer weit nach links befinden. Wir interessieren uns für $\langle x^2 \rangle$ und wollen zeigen dass:

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} t$$

mit der Zeit wächst.
Beweis: Wenn ein Teilchen n Schritte gemacht hat ist die Wahrscheinlichkeit, dass davon r nach rechts und $(n-r)$ nach links gerichtet sind, gleich $P_n(r) = \frac{1}{2^n} \frac{!n}{r!(n-r)!}$
Nach n Schritten ($t = n\Delta t$) hat sich das Teilchen $r\Delta x - (n-r)\Delta x = (2r-n)\Delta x$ nach rechts bewegt.

Dann gilt

$$\langle x^2 \rangle = 4(\Delta x)^2 \sum_{r=0}^{n} \left(r - \frac{n}{2}\right)^2 P_n(r)$$

für seine Position. Nun betrachten wir die Funktion

$$F_n(y) = \frac{(1+y)^n}{2^n y^{n/2}} = \sum_{r=0}^{n} P_n(r) y^{(r-n/2)}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass

$$y \frac{d}{dy}\left[y \frac{dF_n(y)}{dy}\right] = \sum_{r=0}^{n} \left(r - \frac{n}{2}\right)^2 y^{(r-n/2)}$$

Man rechne die Ableitung und setzt $y = 1$ mit dem Ergebnis

$$\langle x^2 \rangle = 4(\Delta x)^2 \left(\frac{n}{4}\right) = n(\Delta x)^2$$

mit $n = t/\Delta t$. Nun betrachten wir den Teilchenfluss an der Stelle $x = x_0$, mit Hilfe der Vorstellung, dass die Teilchen "'Zufallswanderer"' seien. Der positiv gerichtete Fluss besteht aus Teilchen, die sich vorher in einem Interwall der Länge Δx rechts von x_0 befinden. Nach der Zeit Δt verlassen diese Teilchen das Interwall in x-Richtung, die hälfte davon nach rechts und die hälfte nach links.

$$\begin{aligned}
\Gamma_+ &= \frac{1}{2\Delta t} \int_{x_0-\Delta x}^{x_0} n(x)dx \\
&= \frac{1}{2\Delta t} \int_{x_0-\Delta x}^{x_0} \left[n(x_0 + (x - x_0)\frac{dx}{dn}\right] dx \\
&= \frac{1}{2\Delta t} \left[n(x_0)\Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{dn}{dx}\Big|_{x_0}\right]
\end{aligned}$$

(im zweiten Term wurde $y = x - x_0$).
Analog ist der nach links gerichtete Fluss

$$\Gamma_+ = \frac{1}{2\Delta t} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} n(x)dx = \frac{1}{2\Delta t}\left[n(x_0)\Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{dn}{dx}\Big|_{x_0}\right]$$

Der gesamte Fluss ist

$$\Gamma_+ - \Gamma_- = -\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\frac{dn}{dx} = -D\frac{dn}{dx}$$

(Fick'sches Gesetz)

hier ist $D = \dfrac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$; da es mehr Teilchen in einem Gebiet mit höherer Dichte gilt als in einem Gebiet mit niedrigerer Dichte, führt eine Zufallswanderung zu einem Teilchenfluss in Richtung $-\nabla n$

$$\vec{\Gamma} = n\vec{v} = -D\nabla n$$

Kombiniert mit der Kontinuitätsgleichung erhält man

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Gamma} = \text{Quelle} \simeq 0$$

oder

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot (D\nabla n) \simeq 0$$

Was hat dies mit Stössen zu tun??
In einem Plasma ohne nennenswerten elektromagnetischen Feldern ist die Schrittweite der Zufallsbewegung die mittlere freie Weglänge λ_m und der mittlerer Zeitabstand zwischen Stössen $\tau = 1/\nu$. Dann gilt

$$D \sim \lambda_m^2 \nu$$

auch ist

$$\nu \sim \frac{v_t}{\lambda_m} \text{ oder } D \sim \frac{v_t^2}{\nu}$$

Deshalb

$$D = \frac{k_B T}{m\nu}$$

(Konvention bezüglich Faktoren 2)
Wenn eine starkes Magnetfeld vorhanden ist, bleibt diese Überlegung für Diffusion parallel zu $\vec{B}$; für Diffusion senkrecht zu $\vec{B}$ erwarten wir, dass λ_m durch $r_L \simeq v_{th}/\omega_c$ ersetzt wird.
Massenabhängigkeit für Stösse mit Neutralteilchen

$$\frac{\nu_{en}}{\nu_{in}} \sim \frac{\langle v_{te}\sigma_{en}\rangle\, n_n}{\langle v_{tr}\sigma_{in}\rangle\, n_n} \sim \frac{v_{te}}{v_{ti}} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \simeq \frac{D_e}{D_i}$$

Übungen

1. Die Diffusionsgleichung ohne Quellen lautet

$$D\nabla^2 n - \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

Zeigen Sie, daß, wenn $n(\vec{x}, t) = S(\vec{x})e^{-t/\tau}$, dann gilt

$$\nabla^2 S = -\frac{1}{D\tau} S$$

Das Plasma sei in einem rechteckigen Kisten der Längen $2L_x$, $2L_y$, und $2L_z$. Dies bedeutet, dass $S(\pm L_x, y, z) = S(x, \pm L_y, z) = S(x, y, \pm L_z) = 0$.
Machen Sie den Ansatz $S(x, y, z) = S_x(x)S_y(y)S_z(z)$ und geben Sie eine Gleichung f'ur $S_x(x)$ an.
Finden Sie eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} = -\frac{1}{D\tau} S_x$$

mit $S_x(\pm L) = 0$. Zuerst die Einfachste, dann eine Allgemeinere Form.
Bestimmen Sie τ (oder die passenden Werten von τ).

Verallgemeinern Sie die einfache Lösung zum 3-Dimensionalen Fall.

2. Ein schwach ionisiertes Plasma wird in einem kubischen Kasten der Länge L auf jeder Seite eingeschlossen. Es zerfällt auf Grund der ambipolaren Diffusion.

a) Geben Sie ein Formel für die Dichteverteilung der niedrigsten Diffusionsmode.

b) Was bedeutet die (zeitliche) Zerfallskonstante? Berechnen Sie diese für den Fall L=0.3 m und D=0.001 m^2/s.

3. Die Diffusionsgleichung für ein eindimensionales Plasma mit Wänden bei x = $\pm L$ und einer Linienquelle der Stärke Q bei x=0 lautet

$$D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{\partial n}{\partial t} = -Q\delta(x).$$

Für einen stationären Zustand gilt $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$.

a) Zeigen Sie, daß die Lösung der Gleichung für diesen Fall lautet
$n(x) = n_0(1 - |x|/L)$. Skizzieren Sie die Dichteprofil.

b) Die Quellstärke und n_0 sind so verknüpft, daß der Teilchenfluss durch die Wände genau kompensiert wird. Mit Hilfe des Fick'schen Gesetzes berechnen Sie n_0 als Funktion der Quellstärke.

4. Eine lange, zylindrische Plasmasäule hat p = 131.6 N/m^2 und $kT_e = 2$ eV. Es besteht aus He (bei Zimmertemperatur). Der Stossquerschnitt für Elektron-Helium bei 2 eV ist ca. $6\pi\, a_0^2$, wo $a_0 \simeq 0.053$ nm der Bohr'sche Radius ist.

a) Berechnen Sie die Diffusionskonstante für Elektronen, angenommen daš $< \sigma v >$ gemittelt über die Geschwindigkeitsverteilung gleich σv für 2 eV Elektronen ist.

b) Die Stromdichte entlang der Säule sei 2 kA/m^2 und die Elektronendichte sei 10^{16} m^{-3}. Wie groš ist das elektrische Feld?

c) Zusätzlich hat das $kT_i = 0.1$ eV. Berechnen Sie D_i, angenommen, dass der Stossquerschnitt für Ionen-Helium etwa gleich dem Stossquerschnitt für Elektron-Helium ist. Berechnen Sie auch die ambipolaren Diffusionskonstante.

d) Die Dichteprofil wird durch

$$n(r) \;=\; n_0 J_0(\frac{r}{\sqrt{D\tau}})$$

gegeben, mit n(a) = 0 und a = 1 cm. ($J_0(x) \;=\; 0$ für x $\simeq$ 2.4). Berechnen Sie die Einschlusszeit τ, angenommen daš Rekombination und Verluste aus den Enden vernachlässigt werden können.

5. Ein schwach ionisiertes Plasma kann als Scheibe mit einer Dichteverteilung

$$n(x) \;=\; n_0 \cos(\frac{\pi x}{2L}), \qquad\qquad -L \;\leq\; x \;\leq\; L$$

betrachtet werden. Es zerfällt sowohl auf Grund der Rekombination als auch der ambipolaren Diffusion. Bei welcher Dichte ist die Verlustrate für für beide Mechanismen gleich?
Zahlen: $\alpha \;=\; 10^{-15} m^3/s$, L = 0.03 m, D = 0.4 m^2/s.

Auch, finden Sie eine Lösung der Gleichung

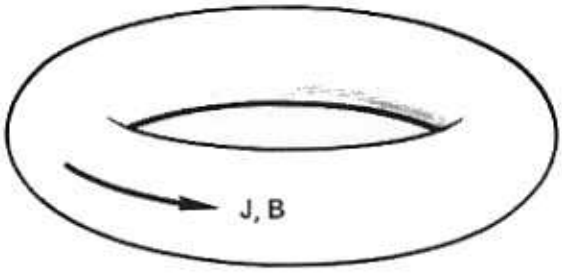
$$\frac{\partial n}{\partial t} \;=\; -\,\alpha n^2 - \frac{n}{\tau}$$

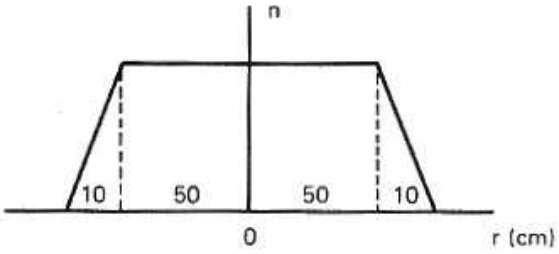
Man setze $f = 1/n$, $f_0 = 1/n(0) = 1/n_0$ und leite eine Gleichung für f her, die einfacher zu lösen ist.

6. Nach einer sehr aufwendigen Rechnung (mitteln der Impulsübertrag bei Coulomb-Stössen über Streuwinkel und Elektronengeschwindigkeit) hat L. Spitzer die Resistivität eines voll ionisierten Plasmas berechnet, mit Ergebnis

$$\eta_{\|} = 5.2 \cdot 10^{-5} \frac{Z \ln \Lambda}{T_e^{3/2}(eV)} \Omega m$$

wobei Z die effektive Ladung der Ionen ist und $\ln \Lambda$ der sog. Coulomb Logarithmus ist. Es berücksichtigt, dass nur Stossparameter kleiner als die Debye Länge zur Streuung beitragen, da aufgrund der Abschirmung sehr kleine Streuwinkel nicht vorkommen. In der Regel gilt $\ln \Lambda \approx 10 - 20$ für Fusionsplasmen. Für Ströme senkrecht zum Magnetfeld gilt $\eta_{\perp} = 2\eta_{\|}$. In einem Tokamak wird ein Strom parallel zum toroidalen Magnetfeld durch ein elektrisches Feld getrieben (Bild, links). Wie gross muss das elektrische Feld sein, um einen Strom von 200 kA in einem Plasma mit T_e=500 eV und ein Querschnitt von 75 cm^2 aufrecht zu erhalten?
(Nehmen Sie $\ln \Lambda = 17$).





7. Man nehme an, dass das Plasma in einem Fusionsanlage den Form eines Zylinders mit dem Durchmesser 1.2 m und Länge 100 m hat. Das Magnetfeld soll gleichförmig mit dem Wert 5 T sein. Die sonstige Parameter seien: n = 10^{21} m^{-3}, kT_i = 20 keV, kT_e = 10 keV. Die Dichteprofil sei ungefähr wie im Bild (rechts). Man nehme an, die Diffusion sei klassisch. Berechnen Sie $D_{\perp}$ bei r=0.5 m. Berechnen Sie auch dN/dt, die Anzahl der Ion-Elektron Paare, die pro Sekunde den Zentralbereich verlassen. Schätzen Sie die Diffusionszeit $\tau \approx -N/(dN/dt)$ ab.

8. Eine zylindrische Plasmasäule hat die Dichteverteilung

$$n = n_0 \cdot (1 - r^2/a^2)$$

wobei $n_0 = 10^{19}$ m^{-3} und a=10 cm. Es sei $kT_e = 100\ eV \gg kT_i$. Wenn das axiale Magnetfeld B=1 T ist, wie gross ist das Verhältnis zwischen der klassischen Diffusionskonstante senkrecht auf B und der Bohm'schen Diffusionskonstante? (Nehmen Sie hier $\ln \Lambda = 10$).

9. Ein Plasma wird ohm'sche geheizt durch einen Strom parallel zum Magnetfeld mit der Stromdichte $j = 10^5\ A/m^2$. Die Dichte sei gleichförmig und beträgt $n = 10^{19}\ m^{-3}$. Die Heizleistung ηj^2 heizt in erster Linie die Elektronen. Wenn $kT_e = 10$ eV, wie gross ist $d(kT_e)/dt$? (Nehmen Sie hier $\ln \Lambda = 10$).

6 Anhänge

6.1 Literatur zur Vorlesung

F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion.*

R. Goldston, P. Rutherford, *Plasmaphysik- eine Einführung*, Vieweg, 1998

M. Kaufmann, *Plasmaphysik und Fusionsforschung*, Teubner, 2003

R.O. Dendy, *Plasma Dynamics*, Oxford Science Publications, 1990

N.A. Krall and A.W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, McGraw-Hill, New York, 1973

K. Nishikawa, M. Wakatani, *Plasma Physics, Basic Theory with Fusion Applications*, Springer, 1990

T.J.M. Boyd and J.J. Sanderson, *The Physics of Plasmas* , Cambridge University Press, 2003

Plasma Physics: an Introductory Course , Edited by R.O. Dendy, Cambridge University Press, 1993

Gerd Janzen, *Plasmatechnik*, Hüthig Verlag, 1992.

J. Wesson, *Tokamaks*, Oxford Science Publications, 1987.

U. Schumacher, *Fusionsforschung- eine Einführung*, Wiss. Buchgesellschaft, 1993

U. Stroth, *Einführung in die Plasmaphysik*, Skriptum vom Institut für Plasmaforschung, Universität Stuttgart

Skripten von Prof. Dr. H. Zohm: www.ipp.mpg.de

Dann click auf Bereiche, dann E2 (Exp. Phys. 2), dann Hartmut Zohm.
Dort unter der Rubrik Skripten können Sie Skripten zur Vorlesungen Plasmaphysik, Plasmaphysik für E-Techniker und/oder MHD holen. Alle sind etwas an Kernfusion orientiert.

Skript von Prof. Dr. F. Brand (in Englisch):
www.physics.usyd.edu.au/plasma/gyro.html
download plasmalec.zip und die word-Dateien auspacken.

Literatur zur "'Kernfusion"' Stand November 2003

T.N. Todd, C.G. Windsor, *Progress in magnetic confinement fusion research* , Contemporary Physics, vol. 39, pp. 255-282 (1998)

R.D. Hazeltine, S.C. Prager, *New Physics in Fusion Plasma Confinement* , Physics Today, July 2002, pp. 30-36

U. Schumacher, *Status and problems of fusion reactor development*, Naturwissenschaften, vol. 88, pp. 102-112 (2001)

F. Engelmann, *Die Physik des Plasmarandes in ASDEX Upgrade: Forschung für ITER* , Phys. Bl., vol. 53, pp. 994-996, 1997

W. Suttrop, *Lang lebe die erste Wand*, Phys. Journal, vol. 5, pp. 19-21, 2006

Skript von Prof. Dr. H. Zohm: www.ipp.mpg.de

dann click auf Bereiche, dann E2 (Exp. Phys. 2), dann Hartmut Zohm.
Von Interesse ist das Skriptum Teil 2 der Vorlesung, SS 1995 (Augsburg)

Ältere aus Physics Today, einschliesslich etwas über Trägheitsfusion:

J.G. Cordey, R.J. Goldston, R.R. Parker, *Progress toward a Tokamak Fusion Reactor* , Physics Today, January 1992, pp. 22-42

J.D. Lindl, R.L. McCrory, E.M. Cambell, *Progress toward Ignition and Burn Propagation in Inertial Confinement Fusion* , Physics Today, September 1992, pp. 32-40

W.J. Hogan, R. Bangerter, G.L. Kulcinski, *Energy from Inertial Fusion* , Physics Today, September 1992, pp. 42-50

Literatur zur Sonne und anderen Anwendungen der Magnetohydrodynamik

K.R. Lang, *SOHO Reveals the Secrets of the Sun* , Scientific American, March, 1997, pp. 32-39

E. Neshne-Ribes, S.L. Baliunas, D. Sokoloff, *The Stellar Dynamo*, Scientific American, August, 1996, pp. 30-36

B.N. Dwivedi, K.J.H. Phillips, *The Paradox of the Sun's Hot Corona* , Scientific American, June, 2001, pp. 26-33

G.D. Holman, *The Mysterious Origins of Solar Flares* , Scientific American, April, 2006, pp. 24-31 (auch in Spektrum der Wissenschaft, Juni, 2006)

E. Parker, *The Physics of the Sun and the Gateway to the Stars* , Physics Today, June, 2000, pp. 26-31

S.W.H. Cowley *The plasma environment of the Earth* , Contemporary Physics, vol. 32, pp. 235-250 (1991)

Spacecraft Probes the Site of Magnetic Reconnection in the Earth's Magnetotail , Physics Today, October, 2001, pp. 16-17

P.M. Bellan *Simulating Solar Prominences in the Laboratory* , American Scientist, vol. 88, pp. 136-143 (2000)

6.2 Nützliche Formel

6.2.1 Vektoridentitäten

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = [(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{D}]\vec{C} - [(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}]\vec{D} = [(\vec{A}\times\vec{C})\cdot\vec{D}]\vec{B} - [(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{D}]\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}) = \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi + \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{A}) = \vec{\nabla}\phi\times\vec{A} + \phi\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \vec{\nabla}(\frac{1}{2}\mathrm{A}^2) - \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times[(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}] = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - [(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{\nabla}]\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$$

6.2.2 Zylinderkoordinaten $(r,\,\theta,\,z)$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}A_\theta + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{z}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{A} &= (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\\ &= \left[\nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2}\left(A_r + 2\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right)\right]\hat{r} + \left[\nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(A_\theta - 2\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\right]\hat{\theta} + \nabla^2 A_z\hat{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} = \hat{r}&\left(A_r\frac{\partial B_r}{\partial r} + A_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial\theta} + A_z\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{1}{r}A_\theta B_\theta\right)\\ +\hat{\theta}&\left(A_r\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + A_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta} + A_z\frac{\partial B_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}A_\theta B_r\right)\\ +\hat{z}&\left(A_r\frac{\partial B_z}{\partial r} + A_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial\theta} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\end{aligned}$$